锦宏教育微信公众号：jh985211　　锦宏教育客服微信：18117901643

2026-2027 学年度上期高 2029 届半期考试数学试卷

时间：120 分钟　　总分：150 分

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分．每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．设全集 $U=\{x|x\text{是小于9的正整数}\}$，集合 $A=\{1,3,5,7,8\}$，则 $\complement_U A=$（　）

A．$\{2,4\}$　　B．$\{2,6\}$　　C．$\{2,4,6\}$　　D．$\{1,2,4,6\}$

2．已知 $a>b>0$，则下列说法正确的是（　）

A．$a^2>b^2$　　B．$ac^2>bc^2$　　C．$2^a<2^b$　　D．$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$

3．函数 $f(x)=\sqrt{-3x^2+18x-27}$ 的定义域为（　）

A．$\mathbf{R}$　　B．$\{3\}$　　C．$(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$　　D．$[3,+\infty)$

4．一种产品原来的年产量是 1000 件，今后 m 年内，计划使产量平均每年比上一年增加 8%，则年产量 y（单位：件）关于经过的年数 x 的函数解析式为（　）

A．$y=1000(1+8\%\cdot x)\ \ (x\in\mathbf{N},\text{且}x\le m)$　　B．$y=1000(1+8\%)^{mx}\ \ (x\in\mathbf{N},\text{且}x\le m)$

C．$y=1000(1+8\%\cdot m)^x\ \ (x\in\mathbf{N},\text{且}x\le m)$　　D．$y=1000(1+8\%)^x\ \ (x\in\mathbf{N},\text{且}x\le m)$

5．已知集合 $A=\{x|0<x<a\}$，$B=\{x|1<x<2\}$，且 $B\subseteq A$，记此时实数 a 的取值范围为 M，集合 $N=\{a|a>3\}$，则“$x\in M$”是“$x\in N$”的（　）条件

A．充分不必要　　B．必要不充分　　C．充要　　D．既不充分也不必要

6．已知函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递增，$f(1)=0$，则不等式 $f(x)\le 0$ 的解集为（　）

A．$(-\infty,-1]\cup(0,1]$　　B．$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$　　C．$[-1,1]$　　D．$(-\infty,-1]\cup[0,1]$

7．若函数 $f(x)=\begin{cases}x(x+4)+1, & x\ge 0,\\ x(x-4)+1, & x<0\end{cases}$，则不等式 $f(2a)>f(a-3)$ 的解集为（　）

A．$(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$　　B．$(-3,1)$　　C．$(-3,+\infty)$　　D．$(-\infty,1)$

8．若函数 $f(x)=\dfrac{ax-1}{x+2}$，则下列说法错误的是（　）

A．当 $a\ne-\dfrac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 图象的对称中心为 $(-2,a)$

B．当 $a=-2$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,2]$ 上的最大值为 1

C．当 $a=2$ 时，函数 $g(x)=x\cdot f(x)$ 在区间 $[3,+\infty)$ 的最小值为 3

D．若函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,+\infty)$ 上不单调递减，则 $a\le-\dfrac{1}{2}$

二、多项选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共计 18 分．每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对得 6 分，选对但不全的得部分分，有选错的得 0 分．

9．已知 $a>0$，且 $a\neq 1$，若 $a^{2x}=3$，则下列说法正确的是（　　）

A．$a^{2x}-a^{-2x}=\dfrac{8}{3}$　　B．$a^{x}=\pm\sqrt{3}$　　C．$\dfrac{a^{x}+a^{-x}}{a^{x}-a^{-x}}=2$　　D．$\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^{x}+a^{-x}}=2$

10．我们规定：当 $a\geq b\geq c$ 时，$\operatorname{mid}\{a,b,c\}=b$，例如：$\operatorname{mid}\{2,1,2\}=2$，$\operatorname{mid}\{-1,3,2\}=2$．

设函数 $f(x)=\operatorname{mid}\left\{x+1,(x+1)^2,-x\right\}$，$x\in\mathbf{R}$，则下列说法正确的是（　　）

A．$f(-1)=0$

B．方程 $f(x)-1=0$ 有三个不同实根

C．$f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$ 上单调递减

D．$\forall x_1,x_2\in\left[\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2},-1\right]$，都有 $f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$

11．已知 $x>0$，$y>0$，且 $x+y=t$，记 $M=\dfrac{1}{x^2+1}+\dfrac{1}{y^2+1}$，$N=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(y+\dfrac{1}{y}\right)$，则下列说法正确的是（　　）

A．若 $t=1$，则 M 既有最大值，又有最小值

B．若 $t>0$，则 N 有最小值，无最大值

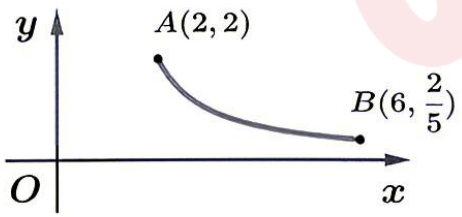
C．若 $t=2$，则 M 既有最大值，又有最小值

D．若 $t=4$，则 M 有最小值，无最大值

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共计 15 分．

12．命题“$\exists a\in\mathbf{R}$，方程 $x^2-ax+1=0$ 无实根”的否定是_____．

13．如图，函数 $f(x)=\dfrac{bx+2}{x+a}$ 的图象过点 $A(2,2)$，$B\left(6,\dfrac{2}{5}\right)$，则此段图象的解析式为_____．



14．函数 $y=[x]$ 的函数值表示不超过 x 的最大整数，例如，$[-3.5]=-4$，$[2.1]=2$．已知函数 $f(x)=x|x-a|$，若函数 $y=[f(x)]$ 在区间 $(0,2)$ 上的值域为 $\{0,1\}$，则实数 a 的取值范围是_____．

四、解答题：本大题共 5 小题，共计 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（13 分）设实数集 $\mathbf{R}$ 为全集，$A=\left\{x\middle|y=\sqrt{x-2}\right\}$，$B=\left\{x\middle|x^2-a<0\right\}$．

（1）当 $a=4$ 时，求 $A\cup B$；

（2）若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 a 的取值范围．

16．（15 分）一家商店使用一架两臂不等长的天平称黄金，该天平左臂长为 a，右臂长为 b．一位顾客到店里想购买 10g 黄金．售货员先将 5g 的砝码放在天平左盘，取出一些黄金放在天平右盘中使天平平衡；再将 5g 的砝码放在天平右盘，再取出一些黄金放在天平左盘中使天平平衡；最后将两次称得的黄金一起交给顾客．（注：当天平平衡时，两侧的物体质量与对应力臂长的乘积相等）

（1）用含 a,b 的式子表示两次称得的黄金克数之和 M；

（2）试判断顾客拿到的黄金质量与 10g 的大小关系，并说明理由；

（3）假设顾客得知自己拿到的黄金质量不超过 12.5g，求该商店天平左臂与右臂长度之比 $\frac{a}{b}$ 的最大值．

17．（15 分）给定函数 $f(x)=a^x$，$g(x)=\left(\frac{1}{a}\right)^x(0<a<1)$．$\forall x\in\mathbf{R}$，用 $m(x)$ 表示 $f(x),g(x)$ 中的最小者，记为 $m(x)=\min\{f(x),g(x)\}$．

（1）求函数 $m(x)$ 的解析式；

（2）已知函数 $F(x)=m(x)+b$ 的图象无限接近直线 $y=2$ 但又不与该直线相交

(i)请写出 b 的值；

(ii)解不等式：$F(k)>F(1-k)$．

18．（17 分）已知函数 $f(x)=x-\dfrac{1}{x-1}$．

（1）判断并用定义证明函数 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上的单调性；

（2）函数 $y=f(x+a)-b$ 是奇函数，求 $a+b$ 的值；

（3）若 $g(x)=a^x+1$ $(a>1)$，对 $\forall x_1\in(1,2]$，$\exists x_2\in(2,3]$，使得 $f(x_2)=g(x_1)$，求实数 a 的取值范围．

19．（17 分）已知幂函数 $f(x)=(m^2-m-1)x^{m^2-2m-1}$ 的图象关于 y 轴对称，函数 $g(x)=f(x)-2(a+1)x+4a$．

（1）求 $f(x)$ 的解析式；

（2）若函数 $g(x)$ 在区间 $[0,3]$ 上的最小值为 -1，求 a；

（3）若 $a>0$，函数 $h(x)=g(x)+2$，若对 $\forall t\in[1,2]$，$\exists x\in[t,t+1]$，使得 $h(h(x))<h(x)$，求实数 a 的取值范围．

2026-2027 学年度上期高 2029 届半期考试数学参考答案

时间：120 分钟　　总分：150 分

一、单项选择题：1-8．CABD　　BDAD

8．解析：$f(x)=\dfrac{ax-1}{x+2}=a-\dfrac{2a+1}{x+2}$，当$a\neq-\dfrac{1}{2}$时，$2a+1\neq0$，易知对称中心$(-2,a)$，A 正确；

当$a=-2$时，$f(x)=\dfrac{3}{x+2}-2$在区间$[-1,2]$上单调递减，$f(x)_{\max}=f(-1)=1$，B 正确；

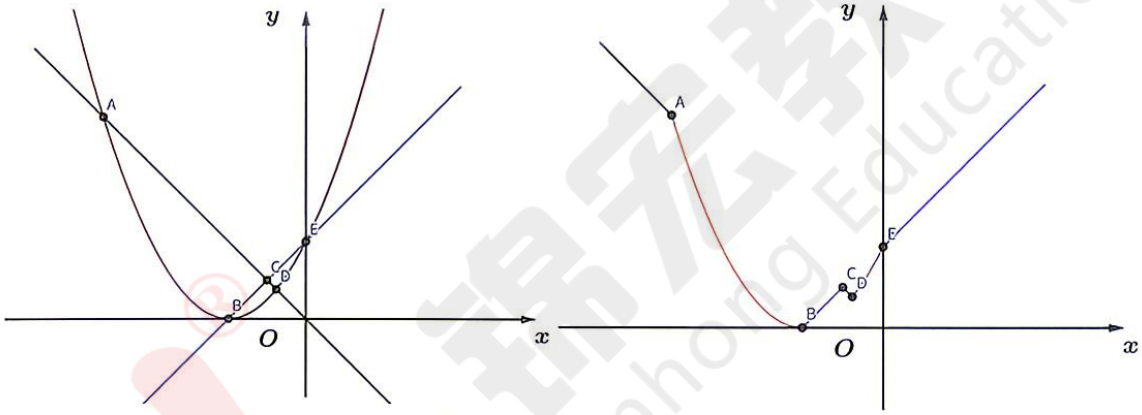
当$a=2$时，$f(x)=2-\dfrac{5}{x+2}$，$g(x)=2x-\dfrac{5x}{x+2}$，令$t=x+2$，则$x=t-2$，由$x\geq3$，知$t\geq5$，

于是$g(x)$化为$h(t)=2(t-2)-\dfrac{5(t-2)}{t}=2t+\dfrac{10}{t}-9$，易知$h(t)$在$[5,+\infty)$上单调递增，则$h(t)_{\min}=h(5)=3$，C 正确；

当$x>-1$时，$x+2>1>0$，因此若$f(x)$在区间$(-1,+\infty)$上不单调递减，则$2a+1\geq0$，即$a\geq-\dfrac{1}{2}$，D 错误．

二、多项选择题：9．AC；　　10．ACD；　　11．BC

10．解析：



由$-x=(x+1)^2$，得$x_A=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$，$x_D=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$；由$x+1=(x+1)^2$，得$x_B=-1$，$x_E=0$，且$y_B=0$，$y_E=1$；

由$-x=x+1$，得$x_C=-\dfrac{1}{2}$，由图 2 观察可知 ACD 正确，B 错误．

11．解析：$M=\dfrac{x^2+y^2+2}{x^2+y^2+x^2y^2+1}=\dfrac{(x+y)^2-2xy+2}{(x+y)^2-2xy+x^2y^2+1}$，

对于 A，$M=\dfrac{3-2xy}{2-2xy+x^2y^2}$，由于$0<xy\leq\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$，令$a=3-2xy\in\left[\dfrac{5}{2},3\right)$，$xy=\dfrac{(3-a)}{2}$，

因此$M=\dfrac{4a}{a^2-2a+5}=\dfrac{4}{a+\dfrac{5}{a}-2}$，易得$M_{\max}=\dfrac{8}{5}$，此时$M$无最小值，A 错误．

对于 C，D，仿照此方法，可得 C 正确，D 错误．

对于 B，$N=xy+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=xy+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{(x+y)^2-2xy}{xy}=xy+\dfrac{1+t^2}{xy}-2$，其中$0<xy\leq\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2=\dfrac{t^2}{4}$，易知 B 正确．

三、填空题

12．$\forall a\in\mathbf{R}$，方程$x^2-ax+1=0$有实根；　13．$f(x)=\dfrac{2}{x-1}$ $(2\leq x\leq6)$ **注：无定义域扣 2 分；**　14．$\left[1,\dfrac{3}{2}\right)\cup\left[2,2\sqrt{2}\right)$

14．解析：因为$f(x)=x|x-a|\geq 0$，且当$x\to 0^+$时，$f(x)\to 0$，所以$[f(x)]=0$一定可以取到，要使函数$y=[f(x)]$的值域为$\{0,1\}$，需满足以下条件：①$\forall x\in(0,2)$，$f(x)<2$；②$\exists x_0\in(0,2)$，$f(x_0)\geq 1$．

当$a\leq 0$时，$f(x)=x(x-a)$在$(0,2)$上单调递增，而$f(1.5)=1.5(1.5-a)>2$，显然矛盾；

当$0<a<2$时，$f(x)$在$\left(0,\frac{a}{2}\right),(a,2)$上单调递增，在$\left(\frac{a}{2},a\right)$上单调递减，$f(x)\leq\max\left\{f\left(\frac{a}{2}\right),f(2)\right\}$，由于$f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4}<1$，因此若满足题意，则必有$1<f(2)\leq 2$，即$1<4-2a\leq 2$，解得$1\leq a<\frac{3}{2}$．

当$a\geq 2$时，根据二次函数对称轴与区间端点的关系，分2种情况讨论：

(i)当$2\leq a<4$时，$\frac{a}{2}<2$，此时$f(x)$在$\left(0,\frac{a}{2}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{a}{2},2\right)$上单调递减，只需$1\leq f\left(\frac{a}{2}\right)<2$，解得$2\leq a<2\sqrt{2}$．

(ii)当$a\geq 4$时，$f(x)$在$(0,2)$上单调递增，故$1<f(2)\leq 2$，　　无解．

综上所述，a的取值范围是$\left[1,\frac{3}{2}\right)\cup\left[2,2\sqrt{2}\right)$．

四、解答题

15．解：（1）由条件知$A=\{x|x\geq 2\}$，　　……2分

当$a=4$时，$B=\{x|x^2-4<0\}=\{x|-2<x<2\}$，　　……4分

所以$A\cup B=\{x|x>-2\}$．　　……6分

（2）当$B=\varnothing$，即$a\leq 0$时，成立；　　……8分

当$B\neq\varnothing$，即$a>0$时，此时$B=\{x|-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}\}$，　　……9分

由$A\cap B=\varnothing$可得$\sqrt{a}\leq 2$，解得$0<a\leq 4$，　　……12分

综上，$a\leq 4$．

所以a的取值范围是$(-\infty,4]$．　　……13分

16．解：（1）设第一次称得的黄金质量为m_1，第二次称得的黄金质量为m_2．　　……1分

第一次砝码在左盘、黄金在右盘，有$5\cdot a=m_1\cdot b$，解得$m_1=\frac{5a}{b}$；　　……2分

第二次黄金在左盘、砝码在右盘，有$m_2\cdot a=5\cdot b$，解得$m_2=\frac{5b}{a}$．　　……3分

所以两次称得的黄金克数之和$M=m_1+m_2=\frac{5a}{b}+\frac{5b}{a}=5\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$．　　……4分

（2）顾客购得的黄金质量大于10g．　　……6分

理由如下：因为$a>0$，$b>0$且$a\neq b$，由基本不等式可得$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=2$，……8分

所以$M=5\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)>5\times2=10$，即$M>10$g.……9分

（3）由题意知$5\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\leq12.5$，化简得$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\leq\frac{5}{2}$.……10分

令$t=\frac{a}{b}$，因为a，$b>0$且$a\neq b$，所以$t>0$且$t\neq1$.……11分

原不等式化为$t+\frac{1}{t}\leq\frac{5}{2}$，化简得$2t^2-5t+2\leq0$，即$(2t-1)(t-2)\leq0$，解得$\frac{1}{2}\leq t\leq2$，……14分

所以$\frac{a}{b}$的最大值是2.……15分

17．解：（1）因为$0<a<1$，当$f(x)\leq g(x)$，即$a^x\leq a^{-x}$时，解得$x\geq0$；……2分

当$f(x)>g(x)$时，解得$x<0$，……4分

故$m(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{a}\right)^x, & x<0,\\ a^x & x\geq0.\end{cases}$（亦可写为$m(x)=a^{|x|}$）.……5分

（2）(i)由(1)可知，$m(x)=a^{|x|}$的渐近线为$y=0$，……7分

故$F(x)=m(x)+b$的渐近线为$y=2$，所以$b=2$．（注：写$b=2$即得全分4分）……9分

(ii)由(i)可知，$F(x)=a^{|x|}+2$，……10分

不等式$F(k)>F(1-k)$，即为$a^{|k|}+2>a^{|1-k|}+2$，即$a^{|k|}>a^{|1-k|}$.……11分

因为$0<a<1$时，函数$y=a^x$单调递减，故$|k|<|1-k|$，……12分

两边平方得$k^2<(1-k)^2$，解得$k<\frac{1}{2}$.……14分

故不等式解集为$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$.……15分

18．解：（1）由复合函数单调性可知，函数$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增.……1分

证明：已知$f(x)=x-\frac{1}{x-1}$，任取$x_1,x_2\in(1,+\infty)$，且$x_1<x_2$，

于是$f(x_1)-f(x_2)=\left(x_1-\frac{1}{x_1-1}\right)-\left(x_2-\frac{1}{x_2-1}\right)=x_1-x_2+\frac{x_1-x_2}{(x_1-1)(x_2-1)}=(x_1-x_2)\left(1+\frac{1}{(x_1-1)(x_2-1)}\right)$

……2分

因为$1<x_1<x_2$，所以$x_1-x_2<0$，$x_1-1>0$，$x_2-1>0$，故$f(x_1)-f(x_2)<0$，即$f(x_1)<f(x_2)$……3分

所以函数$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增.……4分

（2）令函数$h(x)=f(x+a)-b=x+a-b-\frac{1}{x+a-1}$，函数$h(x)$定义域为$\{x|x\neq1-a\}$，……5分

因为该函数为奇函数，所以定义域关于原点对称，得$1-a=0$，即$a=1$. ……6分

此时$h(x)=x+1-\frac{1}{x}-b$，

又因为$h(x)=-h(-x)$恒成立，所以$1-x+\frac{1}{x}-b=-x-1+\frac{1}{x}+b$恒成立，

整理得$2-2b=0$，所以$b=1$， ……7分

因此$h(x)=x-\frac{1}{x}$，经检验，$h(x)$为奇函数， ……8分

故$a+b=2$. ……9分

（3）$a>1$时，$g(x)$在$(1,2]$单调递增，则$g(x)$的值域为$(a+1,a^2+1]$. ……10分

由（1）可知，$f(x)$在$(2,3]$单调递增，则$f(x)$的值域为$\left(1,\frac{5}{2}\right]$. ……11分

根据题意，$(a+1,a^2+1]\subseteq\left(1,\frac{5}{2}\right]$， ……13分

所以$1\le a+1<a^2+1\le\frac{5}{2}$，又$a>1$， ……14分

解得：$1<a\le\frac{\sqrt{6}}{2}$. ……16分

所以a的取值范围是$\left(1,\frac{\sqrt{6}}{2}\right]$ ……17分

19．解：（1）因为$f(x)$是幂函数，所以系数$m^2-m-1=1$，即$m^2-m-2=0$，

解得$m=2$，或$m=-1$. ……1分

当$m=2$时，$f(x)=x^{-1}$，不是偶函数，舍去； ……2分

当$m=-1$时，$f(x)=x^2$，是偶函数，符合题意.

故$f(x)=x^2$. ……3分

（2）由题可知$g(x)=x^2-2(a+1)x+4a$，其对称轴为$x=a+1$， ……4分

①当$a+1\le0$，即$a\le-1$时，$g(x)$在$[0,3]$上单调递增，

故$g(x)_{\min}=g(0)=4a$，即$4a=-1$，解得$a=-\frac{1}{4}$，不符合题意； ……5分

②当$0<a+1<3$时，即$-1<a<2$时，$g(x)$在对称轴处取得最小值，

所以$g(x)_{\min}=g(a+1)=-a^2+2a-1=-1$，解得$a=0$或$a=2$，

其中$a=0$符合题意； ……7分

③当$a+1\ge3$时，即$a\ge2$时，$g(x)$在$[0,3]$上单调递减，

故$g(x)_{\min}=g(3)=3-2a=-1$，解得$a=2$符合题意；

综上，a 的值为 0 或 2．（**注：用分离参数求解也可**）　……9 分

（3）由题意可知，$h(x)=x^2-2(a+1)x+4a+2$．

令$h(x)=y$,则$h(y)-h(x)=(y-x)(y+x)-2(a+1)(y-x)=(y-x)(y+x-2a-2)$

$\therefore h(y)-h(x)=(x^2-(2a+3)x+4a+2)(x^2-(2a+1)x+2a)=(x-1)(x-2a)(x-2)(x-2a-1)$　……11 分

$\forall t\in[1,2],\exists x\in[t,t+1]$,记$h(y)-h(x)<0$解集为$S$,记$T=[t,t+1]$,则$S\cap T\neq\varnothing$.　……12 分

(i)若$a=\frac{1}{2}$,则$(x-1)^2(x-2)^2<0$无解,即$S=\varnothing$,故不合题意;

(ii)若$a\in(0,\frac{1}{2})$,$S=(2a,1)\cup(2a+1,2)$,取$t=2$,则$T=[2,3]$,$S\cap T=\varnothing$;

(iii)若$a\in(\frac{1}{2},1)$,$S=(1,2a)\cup(2,2a+1)$,注意到$0<2-2a<1$,$0<3-(2a+1)<1$, 而T的区间长度为1 个单位, 满足条件;

……13 分

(iv)若$a=1$,$S=(1,2)\cup(2,3)$,显然满足条件;　……14 分

(v)若$a>1$,$S=(1,2)\cup(2a,2a+1)$,注意到T的区间长度为1 个单位, 故$2a-2<1$, 故$1<a<\frac{3}{2}$;　……15 分

(vi)若$a\geq\frac{3}{2}$,$S=(1,2)\cup(2a,2a+1)$,取$t=2$,则$T=[2,3]$, 显然$S\cap T=\varnothing$,不合题意.

综上所述，$\frac{1}{2}<a<\frac{3}{2}$.

所以实数 a 的取值范围是$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$.　……17 分

说明：本套题中，有部分题来源于《人教 A 版高中数学必修第一册》，

第 1 题 P13:例 5，第 2 题 P43:8，第 3 题 P55:2(2)，第 4 题 P119:2，第 5 题 P9:5(2)，第 7 题 P101:7，

第 9 题 P110:7(2)，第 10 题 P68:例 6 和 P101:8(2)，

第 12 题 P35:7(1)，第 13 题 P81:5，第 14 题 P74:13 和《专题与测试卷》P48 备选例 1

第 16 题 P49:7，第 17（2）题 P120:9，第 18（2）题 P87:13，第 19（2）题《专题与测试卷》P47 变式 2.