锦宏教育微信公众号：jh985211　　锦宏教育客服微信：18117901643

高中2024级第一次诊断性考试

数学

本试卷共4页，共19小题，满分150分．考试用时120分钟．

注意事项：

1．答题前，请务必将自己的姓名、考号填写在试题卷和答题卡上．

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上．

3．非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上．

4．考生必须保持答题卡的整洁．考试结束后，将试卷和答题卡一并交回．

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求．

1. 已知全集$U=\mathbf{R}$，$M=\{x|(x-2)(x+1)<0\}$，则$\complement_U M=$（　　）

A. $(-1,2)$　　B. $(-2,1)$

C. $(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$

【答案】D

【解析】

【详解】$\because M=\{x|(x-2)(x+1)<0\}=\{x|-1<x<2\}$，$U=\mathbf{R}$，

$\therefore \complement_U M=\{x|x\le -1$或$x\ge 2\}$，即$\complement_U M=(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$．

2. 在等差数列$\{a_n\}$中，若$a_2+a_{16}=8$，则$a_9=$（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 8

【答案】C

【解析】

【详解】由数列$\{a_n\}$为等差数列，$a_2+a_{16}=8$，

则$a_2+a_{16}=2a_9=8$，解得$a_9=4$．

3. 在一次课外活动中，某班组织男生开展了引体向上测试．现抽取了8名男生的引体向上成绩（单位：个），

依次为9，11，8，10，13，14，16，22，则该组数据的第75百分位数为（　　）

A. 14　　B. 15　　C. 16　　D. 19

【答案】B

【解析】

【详解】将这组数据按从小到大的顺序排列为$8,9,10,11,13,14,16,22$，

因为$8\times0.75=6$，

所以第75百分位数为排列后的第6，7个数据的平均数，即$\frac{14+16}{2}=15$.

4. 已知向量$\vec{a}=(x,4)$，$\vec{b}=(1,x)$，则“$x=2$”是“$\vec{a}//\vec{b}$”的（　　）

A. 既不充分也不必要条件　　B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件　　D. 充要条件

【答案】B

【解析】

【详解】当$x=2$时，$\vec{a}=(2,4)$，$\vec{b}=(1,2)$，所以$\vec{a}=2\vec{b}$，故$x=2\Rightarrow\vec{a}//\vec{b}$，充分性成立；

当$\vec{a}//\vec{b}$时，$x^2=4$，解得$x=\pm2$，故$\vec{a}//\vec{b}$推不出$x=2$，故必要性不成立.

综上，“$x=2$”是“$\vec{a}//\vec{b}$”的充分不必要条件.

5. 已知直线$y=2x+3$与曲线$y=e^{x-a}+x$相切，则实数$a=$（　　）

A. -2　　B. 1　　C. 2　　D. 4

【答案】A

【解析】

【详解】设切点为(x_0,y_0)，对$y=e^{x-a}+x$，求导$y'=e^{x-a}+1$，

切线斜率为2，所以$e^{x_0-a}+1=2$，得$e^{x_0-a}=1$，

即$x_0-a=0$，$x_0=a$，

切点既在曲线上，也在切线上：$y_0=e^{x_0-a}+x_0=1+x_0$，$y_0=2x_0+3$，

联立：$1+x_0=2x_0+3$。解得$x_0=-2$，

又$x_0=a$，所以$a=-2$.

6. 已知$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\cos\alpha=\frac{1}{4}$，则$\sin 2\alpha=$（　　）

A. $-\frac{7}{8}$　　B. $-\frac{1}{8}$　　C. $\frac{1}{8}$　　D. $\frac{7}{8}$

【答案】A

【解析】

【分析】利用差角的正弦公式和同角的三角函数关系式求解.

【详解】由$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha+\sqrt{2}\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha=\frac{1}{4}$，

可得$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

因$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=1+\sin 2\alpha$，

则$\sin 2\alpha=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2-1=-\frac{7}{8}$.

7. 已知x，$y\in\mathbf{R}$，$a>1$，$b>1$，若$a^x=b^y=8$，且$ab=16$，则$x+y$的最小值为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. 2　　D. 3

【答案】D

【解析】

【分析】通过对数换底公式将x,y转化为关于a,b的对数表达式，结合$ab=16$的定值条件，利用基本不等式可求解$x+y$的最小值

【详解】因$a^x=b^y=8$，则$\log_a 8=x,\log_b 8=y$，$\frac{1}{x}=\log_8 a,\frac{1}{y}=\log_8 b$，

结合$ab=16$，可得$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\log_8 ab=\log_8 16=\frac{4}{3}\log_2 2=\frac{4}{3}$.

则$x+y=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+y)=\frac{3}{4}\left(2+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)\geq\frac{3}{4}\left(2+2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}}\right)=3$，

当且仅当$\frac{y}{x}=\frac{x}{y}\Rightarrow x=y=\frac{3}{2}$时取等号.

锦宏教育微信公众号：jh985211　　锦宏教育客服微信：18117901643

8. 在$(x+y+z+1)^{n+3}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$的展开式中，含$xyz$的项的系数为$a_n$，记数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的前$n$项和为$S_n$．若不等式$S_n<m$恒成立，则实数$m$的最小值为（　　）

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{9}$　　C. $\frac{1}{12}$　　D. $\frac{1}{18}$

【答案】C

【解析】

【分析】先通过分步乘法计数原理求出展开式中xyz的项的系数为a_n，再利用裂项相消法求解数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的前$n$项和为$S_n$，结合$S_n$的单调性与极限值，确定使不等式恒成立的$m$的最小值；

【详解】对于$(x+y+z+1)^{n+3}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$的展开式，每一项由$n+3$个因式各取一个元素相乘得到。

要得到含xyz的项，需从$n+3$个因式中选取1个取x、1个取y、1个取z，剩余n个因式取常数1，

根据分步乘法计数原理：选x有$n+3$种方法，选y有$n+2$种方法，选z有$n+1$种方法，

因此该项的系数为$a_n=(n+3)(n+2)(n+1)$，其中$n\in\mathbf{N}^*$，

数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的通项为$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{(n+3)(n+2)(n+1)}$，

利用分式裂项公式拆分可得：$\frac{1}{(n+3)(n+2)(n+1)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n+2)(n+1)}-\frac{1}{(n+3)(n+2)}\right]$

前n项和$S_n=\sum_{n}^{i=1}\frac{1}{a_i}$，代入裂项结果得：

$$S_n=\frac{1}{2}\sum_{n}^{i=1}\left[\frac{1}{(i+2)(i+1)}-\frac{1}{(i+3)(i+2)}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right]$$

$$=\frac{1}{12}-\frac{1}{2(n+2)(n+3)}$$

分析S_n的性质：由于$\frac{1}{2(n+2)(n+3)}>0$，因此对任意$n\in\mathbf{N}^*$，均有$S_n<\frac{1}{12}$；

且随着n增大，$\frac{1}{2(n+2)(n+3)}$单调递减，故S_n单调递增，当$n\to+\infty$时，$S_n\to\frac{1}{12}$，

锦宏教育微信公众号：jh985211　　锦宏教育客服微信：18117901643

若不等式$S_n<m$恒成立，则实数m的最小值为$\frac{1}{12}$.

二、选择题：本大题共**3**小题，每小题**6**分，共计**18**分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得**6**分，部分选对的得部分分，有选错的得**0**分．

9. 已知复数z满足$z(1-\mathrm{i})=3+4\mathrm{i}$，则（　　）

A. z的虚部为$\frac{7}{2}\mathrm{i}$　　B. $z+\frac{1}{2}$是纯虚数

C. $|z|=\frac{5\sqrt{2}}{2}$　　D. $\overline{z}=\frac{1}{2}-\frac{7}{2}\mathrm{i}$

【答案】BC

【解析】

【详解】$z=\frac{3+4\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{(3+4\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{3+3\mathrm{i}+4\mathrm{i}+4\mathrm{i}^2}{1-\mathrm{i}^2}=\frac{-1+7\mathrm{i}}{2}$,

A选项，虚部为$\frac{7}{2}$，A错误；

B选项，$z+\frac{1}{2}=\frac{7\mathrm{i}}{2}$，为纯虚数，B正确；

C选项，$|z|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{49}{4}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$，C正确；

D选项，$\overline{z}=-\frac{1}{2}-\frac{7}{2}\mathrm{i}$，D错误.

10. 已知函数$f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x+\sin^2 x$，则（　　）

A. $f(x)$在区间$\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$上单调递减

B. $f(x)$的最大值为$\frac{3}{2}$

C. $f(x)$的图象可由$y=\sin 2x$的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，再向上平移$\frac{1}{2}$个单位长度得到

D. $f(x)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{12},\frac{1}{2}\right)$成中心对称图形

【答案】ABD

【解析】

锦宏教育微信公众号：jh985211　　锦宏教育客服微信：18117901643

【分析】先利用二倍角公式和辅助角公式将$f(x)$化简为正弦型函数，再结合正弦函数的单调性、最值、图象平移规则、中心对称性质逐一判断各选项.

【详解】∵ $f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x+\sin^2 x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1-\cos 2x}{2}=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$,

对选项A：当$x\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$时，$2x-\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$,

∵ $y=\sin t$在$t\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$上单调递减,

∴ $f(x)$在区间$\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$上单调递减，故A正确；

对选项B：∵ $\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的最大值为1,

∴ $f(x)$的最大值为$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，故B正确；

对选项C：将$y=\sin 2x$的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度,

变为$y=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,

再向上平移$\frac{1}{2}$个单位长度变为$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$，与$f(x)$解析式不符，故C错误；

对选项D：令$2x-\frac{\pi}{6}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12},k\in\mathbf{Z}$,

此时$f(x)=\sin k\pi+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,

当$k=0$时，可得$f(x)$的一个对称中心为$\left(\frac{\pi}{12},\frac{1}{2}\right)$，故D正确.

11. 已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，$y=f(x+1)-2$是奇函数，$y=f(2x+3)$是偶函数，且$f(2025)+f(2026)=7$，则（　　）

A. $f(x)+f(x+4)=4$　　B. 4是$f(x)$的一个周期

C. $f(0)=-1$　　D. $\sum_{k=1}^{2026}f(k)=4055$

【答案】ACD

【解析】

【分析】由$y=f(x+1)-2$是奇函数，可得$f(x+1)-2+f(-x+1)-2=0$，即$f(x)+f(2-x)=4$，由$y=f(2x+3)$是偶函数，可得$f(2x+3)=f(-2x+3)$，即$f(x+4)=f(-x+2)$，进而可得$f(x)+f(x+4)=4$，然后可得函数$f(x)$的一个周期为8，结合周期及条件再求值即可.

【详解】$y=f(x+1)-2$是奇函数，则$f(x+1)-2+f(-x+1)-2=0$，

即$f(1+x)+f(1-x)=4$，则$f(x)+f(2-x)=4$

又$y=f(2x+3)$是偶函数，所以$f(2x+3)=f(-2x+3)$，

即$f(x+3)=f(-x+3)$，则$f(x+4)=f(-x+2)$，

$\therefore f(x)+f(2-x)=f(x)+f(x+4)=4$，故A正确；

由$f(x)+f(x+4)=4$，则$f(x+4)=-f(x)+4\neq f(x)$，故B错误；

$\therefore f(x+8)=-f(x+4)+4=-[-f(x)+4]+4=f(x)$，

则函数$f(x)$的一个周期为8，4不是$f(x)$的一个周期，

由$f(1+x)+f(1-x)=4$，则$f(1)+f(1)=4$，解得$f(1)=2$，

$f(2025)=f(253\times8+1)=f(1)=2, f(2026)=f(253\times8+2)=f(2)$，

$\therefore f(2025)+f(2026)=2+f(2)=7$，解得$f(2)=5$，

又$f(2)+f(0)=4$，即$5+f(0)=4$，解得$f(0)=-1$，故C正确；

由$f(x)+f(x+4)=4$，

则$f(1)+f(5)=4, f(2)+f(6)=4, f(3)+f(7)=4, f(4)+f(8)=4$，

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(8)=4\times4=16$，$2026=253\times8+2$，

$\sum_{k=1}^{2026}f(k)=253\times16+f(1)+f(2)=4048+2+5=4055$，故D正确.

三、填空题：本题共**3**小题，每小题**5**分，共**15**分.

12. 若 $f(x)=\begin{cases}f(x+2),x<1\\ \log_3(x+1),x\geq 1\end{cases}$，则 $f(0)=$_____.

【答案】1

【解析】

【分析】需依据分段函数的定义即可求解.

【详解】将 $x=0$ 代入可得，$f(0)=f(0+2)=f(2)$，

再将 $x=2$ 代入可得，$\log_3(2+1)=\log_3 3=1$.

13. 一个口袋里装有 4 个红球和 2 个白球，这些球除颜色外完全相同．现从中任意取出 3 个小球，设变量 X 为取出的 3 个小球中红球的个数，则 X 的数学期望 $E(X)=$_____.

【答案】2

【解析】

【分析】本题为超几何分布类的古典概型期望计算问题，需先确定随机变量的所有可能取值，计算对应取值的概率，再依据数学期望的定义求解；

【详解】首先明确试验条件：口袋中共有 6 个除颜色外完全相同的小球，其中红球 4 个、白球 2 个，

从中任意取出 3 个小球，设 X 为取出的红球个数，随机变量 X 的所有可能取值为 $1,2,3$，

则 $P(X=1)=\dfrac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\dfrac{4}{20}=\dfrac{1}{5}$，$P(X=2)=\dfrac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}=\dfrac{12}{20}=\dfrac{3}{5}$；

$P(X=3)=\dfrac{C_4^3C_2^0}{C_6^3}=\dfrac{4}{20}=\dfrac{1}{5}$

数学期望为 $E(X)=1\times\dfrac{1}{5}+2\times\dfrac{3}{5}+3\times\dfrac{1}{5}=2$

14. 以平衡位置为原点，忽略阻力时，弹簧振子做简谐振动，位移随时间变化可表示为余弦型函数．记弹簧振子在时刻 t 的位移为 $f(t)$（位移单位：cm，时间 t 单位：s），称 $f(t)=0$ 的时刻为过零时刻，对应弹簧振子经过平衡位置．若在时段 (a,b) 内（端点不计入）恰有 k 个过零时刻，就称 (a,b) 为 k 次过零时段 $(k\in\mathbf{N})$．已知某弹簧振子的位移满足 $f(t)=\cos\left(\omega t-\dfrac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$，且 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 是 0 次过零时段，则 ω 的取值范围是_____.

【答案】$\left(0,\frac{5}{6}\right]\cup\left[\frac{5}{3},\frac{11}{6}\right]$

【解析】

【分析】令$x=\omega t-\frac{\pi}{3}$，$t\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，则$x\in\left(\frac{\omega\pi}{2}-\frac{\pi}{3},\omega\pi-\frac{\pi}{3}\right)$，由题可知$\cos x=0$在此区间无解，也就是相位区间完整落在某一段余弦不取0的区间$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$内；列出不等式组，结合$\omega>0$，对整数$k$分类讨论即可求出$\omega$的取值范围.

【详解】令$x=\omega t-\frac{\pi}{3}$，当$t\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时，则$x\in\left(\frac{\omega\pi}{2}-\frac{\pi}{3},\omega\pi-\frac{\pi}{3}\right)$，

由$f(t)=0$等价于$\cos x=0$，则$x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

由题可知，要求区间$\left(\frac{\omega\pi}{2}-\frac{\pi}{3},\omega\pi-\frac{\pi}{3}\right)$内不包含任何一个形如$\frac{\pi}{2}+k\pi$的零点，

即该区间完全落在某一段$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right),k\in\mathbf{Z}$的余弦非零区间内，

当$k=0$时，对应区间为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，则$\begin{cases}\frac{\omega\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\geq-\frac{\pi}{2}\\ \omega\pi-\frac{\pi}{3}\leq\frac{\pi}{2}\end{cases}$，解得$\begin{cases}\omega\geq-\frac{1}{3}\\ \omega\leq\frac{5}{6}\end{cases}$，所以$-\frac{1}{3}\leq\omega\leq\frac{5}{6}$，

又$\omega>0$，所以$0<\omega\leq\frac{5}{6}$，即$\omega\in\left(0,\frac{5}{6}\right]$；

当$k=1$时，对应区间为$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$，则$\begin{cases}\frac{\omega\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\geq\frac{\pi}{2}\\ \omega\pi-\frac{\pi}{3}\leq\frac{3\pi}{2}\end{cases}$，解得$\begin{cases}\omega\geq\frac{5}{3}\\ \omega\leq\frac{11}{6}\end{cases}$，所以$\frac{5}{3}\leq\omega\leq\frac{11}{6}$，即$\omega\in\left[\frac{5}{3},\frac{11}{6}\right]$；

当$k\geq2$时，$\begin{cases}\frac{\omega\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\geq k\pi-\frac{\pi}{2}\\ \omega\pi-\frac{\pi}{3}\leq k\pi+\frac{\pi}{2}\end{cases}$，解得$\begin{cases}\omega\geq2k-\frac{1}{3}\\ \omega\leq k+\frac{5}{6}\end{cases}$，又$k\geq2$，此时$2k-\frac{1}{3}>k+\frac{5}{6}$，无解；

当$k\leq-1$时，$\omega<0$，不合题意，

综上，ω的取值范围为$\left(0,\frac{5}{6}\right]\cup\left[\frac{5}{3},\frac{11}{6}\right]$.

四、解答题：本大题共**5**小题，共**77**分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. 已知函数$f(x)=x^3-3ax+2(a\in\mathbf{R})$在$x=1$处取得极值．

（1）若直线$y=b$与曲线$y=f(x)$有三个不同的交点，求实数b的取值范围；

（2）求$f(x)$在区间$[-1,3]$上的最大值与最小值．

【答案】（1）

$(0,4)$；

（2）

最大值为20，最小值为0.

【解析】

【分析】（1）先根据函数在$x=1$处取极值的条件求出参数a，再通过导数分析函数的单调性与极值，最后结合直线与曲线的交点个数要求确定b的范围；

（2）由（1）并比较区间内极值点与端点的函数值可得到$f(x)$最值.

【小问1详解】

$f'(x)=3x^2-3a$，因$f(x)$在$x=1$处取得极值，则$f'(1)=3-3a=0\Rightarrow a=1$，

则$f'(x)=3x^2-3$，$f'(x)>0\Rightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$；$f'(x)<0\Rightarrow x\in(-1,1)$，

则$f(x)$在$(-\infty,-1),(1,+\infty)$上单调递增，在$(-1,1)$上单调递减.

则$f(x)$在$x=-1$时取极大值，在$x=1$时取极小值.

因直线$y=b$与曲线$y=f(x)$有三个不同的交点，则b的取值应介于函数极小值与极大值之间，

从而$f(1)<b<f(-1)\Rightarrow 0<b<4$；

【小问2详解】

由（1）可得$f(x)$在$[-1,1]$上单调递减，在$(1,3]$上单调递增.

又$f(-1)=4,f(3)=20$，

则$f(x)_{\min}=f(1)=0,f(x)_{\max}=\max\{f(-1),f(3)\}=f(3)=20$.

锦宏教育微信公众号：jh985211　　锦宏教育客服微信：18117901643

16. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=2$，且$S_{n+1}=3S_n+2\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$.

（1）证明：数列$\{S_n+1\}$是等比数列，并求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=\left(n-\frac{1}{2}\right)a_n$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$.

【答案】（1）由题意得：$S_{n+1}+1=3S_n+2+1=3\left(S_n+1\right)$，又$S_1+1=a_1+1=3$，

所以数列$\{S_n+1\}$是以首项为3，公比为3的等比数列，

所以$S_n+1=3\times3^{n-1}=3^n$，即$S_n=3^n-1$，

当$n\geq2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=3^n-1-\left(3^{n-1}-1\right)=2\times3^{n-1}$，

当$n=1$时，$2\times3^0=2$，

所以$a_n=2\times3^{n-1}$；

（2）$T_n=\left(n-1\right)\times3^n+1$

【解析】

【分析】（1）利用等比数列的定义即可得证；利用$a_n=S_n-S_{n-1}\left(n\geq2\right)$即可求$a_n$；

（2）由题意得$b_n=\left(2n-1\right)\times3^{n-1}$，利用错位相减法即可求解.

【小问1详解】

略

【小问2详解】

由题意得：$b_n=\left(n-\frac{1}{2}\right)\times2\times3^{n-1}=\left(2n-1\right)\times3^{n-1}$，

所以$T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=1\times3^0+3\times3^1+5\times3^2+\cdots+\left(2n-1\right)\times3^{n-1}$①，

$3T_n=1\times3+3\times3^2+5\times3^3+\cdots+\left(2n-1\right)\times3^n$②，

由①－②有：$-2T_n=1+2\times\left(3+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1}\right)-\left(2n-1\right)\times3^n$

$=1+2\times\frac{3\times\left(1-3^{n-1}\right)}{1-3}-\left(2n-1\right)\times3^n=-2+\left(2-2n\right)\times3^n$，

所以$T_n=\left(n-1\right)\times3^n+1$.

17. 在$\triangle ABC$中，三个角A，B，C所对的边分别是a，b，c．已知向量$\vec{m}=(b-2a,c)$，$\vec{n}=(\cos C,\cos B)$，且$\vec{m}\perp\vec{n}$．

（1）求C；

（2）记$\triangle ABC$外接圆的圆心为O，边BC的中点为D，若$AD=\sqrt{7}$，$a=2$，求$\cos\angle OAD$的值．

【答案】（1）$\dfrac{\pi}{3}$

（2）$\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

【解析】

【分析】（1）利用向量垂直的数量积为0，结合正弦定理与两角和正弦公式化简求解即可；（2）先用余弦定理求出边长b，c，和$\cos A$，再根据正弦定理求出外接圆半径，依托外心性质得$OD\perp BC$，再求出OD，最后用余弦定理求解即可.

【小问1详解】

$\because\vec{m}\perp\vec{n}$，$\therefore\vec{m}\cdot\vec{n}=0$，即$(b-2a)\cos C+c\cos B=0$，

由正弦定理得$(\sin B-2\sin A)\cos C+\sin C\cos B=0$，

化简得$\sin(B+C)=2\sin A\cos C$，又$A+B+C=\pi$，$\therefore\sin(B+C)=\sin A$，

即$\sin A=2\sin A\cos C$，又$A\in(0,\pi)$，$\therefore\sin A\neq 0$，

$\therefore\cos C=\dfrac{1}{2}$，又$C\in(0,\pi)$，$\therefore C=\dfrac{\pi}{3}$.

【小问2详解】

$\because D$是边BC的中点，$\therefore CD=1$，

在$\triangle ADC$中，由余弦定理得$AD^2=AC^2+DC^2-2AC\times DC\times\cos C$，

即$b^2-b-6=0$，解得$b=3$或$b=-2$（舍），

在$\triangle ABC$中，由余弦定理得$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\times BC\times\cos C$，

即$c^2=7$，解得$c=\sqrt{7}$或$c=-\sqrt{7}$（舍），

再由余弦定理得$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{9+7-4}{6\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，

$\because O$是$\triangle ABC$外接圆的圆心，

$\therefore \triangle ABC$外接圆的半径满足$2R=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$，即$R=\dfrac{\sqrt{21}}{3}=OB=OC$，

又D是边BC的中点，$\therefore OD\perp BC$，

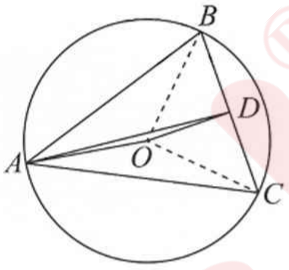
又$\because$圆心角是对应圆周角的2倍，即$\angle BOC=2A$，

$\therefore \angle DOC=A$，$OD=OC\cos A=\dfrac{\sqrt{21}}{3}\times\dfrac{2\sqrt{7}}{7}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

在$\triangle OAD$中，$OA=R=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$，$AD=\sqrt{7}$，$OD=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

由余弦定理得$\cos\angle OAD=\dfrac{OA^2+AD^2-OD^2}{2OA\cdot AD}=\dfrac{\frac{21}{9}+7-\frac{4}{3}}{2\times\frac{\sqrt{21}}{3}\times\sqrt{7}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$，

$\therefore \cos\angle OAD$的值为$\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$.



18. 为探究环境温度对某型号纯电动汽车实际续航里程的影响，某新能源汽车企业随机抽取一辆该型号试验车，在车速、路况、载重等变量保持一致的前提下，分别在5种不同环境温度下开展满电续航测试．测得环境温度x（单位：℃）与实测续航里程y（单位：km）的对应数据如下表：

环境温度x（℃）	−5	0	5	10	20
实测续航里程y（km）	260	265	280	305	330

与此同时，为研究冬季启动电池预热功能对车辆实际续航的影响，该企业随机抽取200名该型号车主开展问卷调查．规定：冬季实际续航里程不低于280 km（即标称续航350 km的80%）为“续航达标”．调查结果如下列联表所示：

电池预热功能	续航	合计

	达标	未达标	
冬季启用	75	25	100
冬季未启用	55	45	100
合计	130	70	200

（1）求实测续航里程 y 关于环境温度 x 的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，并预测当环境温度为 25℃时，该车的实测续航里程；

（2）依据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，分析冬季启用电池预热功能与续航达标是否有关联；

（3）根据列联表数据，用样本分布的频率估计总体分布的概率．从该型号纯电动汽车中随机抽取 10 辆（假设该型号汽车的总体数量远大于 10），记 X 为这 10 辆电动汽车中“冬季续航未达标”的辆数，令 $P(k)=P(X=k)(k=0,1,2,\ldots,10)$，求 $P(k)$ 取最大值时 k 的值．

参考公式或数据：

线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中，系数 $\hat{b}$，$\hat{a}$ 由下式确定：$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$；

参考数据：$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=1110$；

独立性检验统计量：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$．临界值表如下：

α	0.1	0.05	0.01	0.001
χ_α	2.706	3.841	6.635	10.828

【答案】（1）线性回归方程为 $\hat{y}=3x+270$，环境温度为 25℃时，该车实测续航里程的预测值为 345 km；

（2）依据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，推断冬季启用电池预热功能与续航达标有关联，该推断犯错误的概率不超过 0.01；

（3）3

【解析】

【分析】（1）先求出$\overline{x},\overline{y}$，再利用最小二乘法公式求出$\hat{a},\hat{b}$，即可求得线性经验回归方程；

（2）利用给定的2×2列联表，求出χ^2，再与临界值比对求解；

（3）先得到随机变量X服从二项分布$X\sim B\left(10,\frac{7}{20}\right)$，由$\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)}>1$，得$k<3.85$，

进而得到$P(k)$的单调性，即可得到取最大值时k的值.

【小问1详解】

由题中5组环境温度数据，得$\overline{x}=\frac{-5+0+5+10+20}{5}=6$，$\overline{y}=\frac{260+265+280+305+330}{5}=288$，

则$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2=(-5-6)^2+(0-6)^2+(5-6)^2+(10-6)^2+(20-6)^2=370$，

所以$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2}=\frac{1110}{370}=3$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=288-3\times6=270$，

所以回归方程$\hat{y}=3x+270$，

当环境温度为25℃时，$\hat{y}=3\times25+270=345$，即预测续航里程为345 km；

【小问2详解】

提出零假设H_0：冬季启用电池预热功能与续航达标无关联，

由$\chi^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{200\times(75\times45-25\times55)^2}{100\times100\times130\times70}\approx8.791>6.635$，

因此拒绝零假设H_0，依据小概率值$\alpha=0.01$的独立性检验，认为冬季启用电池预热功能与续航达标有关联，

该推断犯错误的概率不超过0.01.

【小问3详解】

由列联表数据，样本中冬季续航未达标的频率为$\frac{70}{200}=\frac{7}{20}$，用频率估计总体概率，即从该型号汽车中随机

抽取1辆，冬季续航未达标的概率为$\frac{7}{20}$，

由于该型号汽车总体数量远大于10，抽取10辆的试验可视为独立重复试验，

因此随机变量 X 服从二项分布 $X\sim B\left(10,\frac{7}{20}\right)$，

其概率为 $P(X=k)=C_{10}^{k}\left(\frac{7}{20}\right)^{k}\left(\frac{13}{20}\right)^{10-k}$，$(k=0,1,2,\ldots,10)$，

$$\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)}=\frac{C_{10}^{k}\left(\frac{7}{20}\right)^{k}\left(\frac{13}{20}\right)^{10-k}}{C_{10}^{k-1}\left(\frac{7}{20}\right)^{k-1}\left(\frac{13}{20}\right)^{10-(k-1)}}=\frac{7(11-k)}{13k},$$

由 $\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)}>1$，即 $7(11-k)>13k$，解得 $k<3.85$，

当 $k=1,2,3$ 时，$P(X=k)>P(X=k-1)$，概率 $P(k)$ 随 k 增大而递增，

由 $\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)}\le 1$，即 $7(11-k)\le 13k$，解得 $k\ge 3.85$，

当 $k\ge 4$ 时，概率 $P(k)$ 随 k 增大而递减，

所以当 $k=3$ 时，$P(k)$ 取最大值.

19. 已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{a(x-1)}{2\sqrt{x}}(a\in\mathbf{R})$.

（1）当 $a=2$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）当 $x>1$ 时，$f(x)<0$，求 a 的取值范围；

（3）设 $n\in\mathbf{N}^{*}$，求证：$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{k(k+2)}}<\ln\frac{(n+1)(n+2)}{2}<\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{\sqrt{k(k+2)}}$.

【答案】（1）单调递减区间为 $(0,+\infty)$，无单调递增区间

（2）$[2,+\infty)$

（3）由（2）知：当 $x>1$，$a=2$ 时，$\ln x<\frac{x-1}{\sqrt{x}}$，

取 $x=\frac{n+2}{n}(n\in\mathbf{N}^{*})$，则 $\ln(n+2)-\ln n<\frac{\frac{2}{n}}{\sqrt{\frac{n+2}{n}}}=\frac{2}{\sqrt{n(n+2)}}$，

$\therefore\left[\ln(n+2)-\ln n\right]+\left[\ln(n+1)-\ln(n-1)\right]+\left[\ln n-\ln(n-2)\right]+\cdots+(\ln 4-\ln 2)+$

$(\ln 3-\ln 1)<\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{\sqrt{k(k+2)}}$，

即 $\ln(n+2)+\ln(n+1)-\ln 2-\ln 1=\ln\frac{(n+2)(n+1)}{2}<\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{\sqrt{k(k+2)}}$；

设 $h(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}(x>1)$，则 $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0$，

$\therefore h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore h(x)>h(1)=0$，

即当 $x>1$ 时，$\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}$，

取 $x=\frac{n+2}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $\ln(n+2)-\ln n>\frac{\frac{4}{n}}{\frac{2n+2}{n}}=\frac{2}{n+1}$，

$\because 4n(n+2)-3(n+1)^2=n^2+2n-3=(n-1)(n+3)\geq 0$，

$\therefore\frac{4}{(n+1)^2}\geq\frac{3}{n(n+2)}$，即 $\frac{2}{n+1}\geq\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n(n+2)}}$，$\therefore\ln(n+2)-\ln n>\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n(n+2)}}$，

$\therefore\left[\ln(n+2)-\ln n\right]+\left[\ln(n+1)-\ln(n-1)\right]+\left[\ln n-\ln(n-2)\right]+\cdots+(\ln 4-\ln 2)+$

$(\ln 3-\ln 1)>\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{k(k+2)}}$，

即 $\ln\frac{(n+2)(n+1)}{2}>\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{k(k+2)}}$；

综上所述：$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{k(k+2)}}<\ln\frac{(n+1)(n+2)}{2}<\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{\sqrt{k(k+2)}}$.

【解析】

【分析】（1）求导后，根据 $f'(x)\leq 0$ 恒成立可得单调区间；

（2）求导后，分别在 $a\geq 2$、$a\leq 0$ 和 $0<a<2$ 的情况下讨论 $f(x)$ 的单调性，进而确定正确的取值范围；

（3）由（2）得 $\ln x<\frac{x-1}{\sqrt{x}}$；构造函数 $h(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}(x>1)$，可确定 $\ln x>\frac{2(x-1)}{x+1}$，结合

$\frac{2}{n+1}\geq\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n(n+2)}}$，对$\frac{2(x-1)}{x+1}<\ln x<\frac{x-1}{\sqrt{x}}$取$x=\frac{n+2}{n}$，即可累加证得结论.

【小问 1 详解】

当$a=2$时，$f(x)=\ln x-\frac{x-1}{\sqrt{x}}=\ln x-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$，则$f(x)$定义域为$(0,+\infty)$，

$\because f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}-x-1}{2x\sqrt{x}}=-\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}}\leq 0$，

$\therefore f(x)$的单调递减区间为$(0,+\infty)$，无单调递增区间.

【小问 2 详解】

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a(x+1)}{4x\sqrt{x}}=\frac{4\sqrt{x}-a(x+1)}{4x\sqrt{x}}$，

令$g(x)=4\sqrt{x}-a(x+1)(x>1)$，则$g'(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-a$，

①当$a\geq 2$时，$\because x>1$，$\therefore 0<\frac{2}{\sqrt{x}}<2$，$\therefore g'(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-a<0$，

$\therefore g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，$\therefore g(x)<g(1)=4-2a\leq 0$，即$f'(x)\leq 0$，

$\therefore f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，$\therefore f(x)<f(1)=0$，符合题意；

②当$a\leq 0$时，$g(x)>0$恒成立，即$f'(x)>0$恒成立，

$\therefore f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，$\therefore f(x)>f(1)=0$，不合题意；

③当$0<a<2$时，令$g'(x)=0$，解得：$x=\frac{4}{a^2}>1$，

$\therefore$当$x\in\left(1,\frac{4}{a^2}\right)$时，$g'(x)>0$，$\therefore g(x)$在$\left(1,\frac{4}{a^2}\right)$上单调递增，

此时$g(x)>g(1)=4-2a>0$，

$\therefore$当$x\in\left(1,\frac{4}{a^2}\right)$时，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$在$\left(1,\frac{4}{a^2}\right)$上单调递增，此时$f(x)>f(1)=0$，不合题意；

综上所述：实数a的取值范围为$[2,+\infty)$.

【小问 3 详解】

略.

【点睛】结论点睛：对于对数函数$y=\ln x$的常用放缩为：当$x>1$时，$\frac{2(x-1)}{x+1}<\ln x<\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$；当$0<x<1$时，$\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}<\ln x<\frac{2(x-1)}{x+1}$.