锦宏教育微信公众号：jh985211　　锦宏教育客服微信：18117901643

高中2024级第一次诊断性考试

数学

本试卷共4页，共19小题，满分150分．考试用时120分钟．

注意事项：

1．答题前，请务必将自己的姓名、考号填写在试题卷和答题卡上．

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上．

3．非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上．

4．考生必须保持答题卡的整洁．考试结束后，将试卷和答题卡一并交回．

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求．

1．已知全集$U=\mathbf{R}$，$M=\{x|(x-2)(x+1)<0\}$，则$\complement_U M=$（　）

A．$(-1,2)$　　B．$(-2,1)$

C．$(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$　　D．$(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$

2．在等差数列$\{a_n\}$中，若$a_2+a_{16}=8$，则$a_9=$（　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．8

3．在一次课外活动中，某班组织男生开展了引体向上测试．现抽取了8名男生的引体向上成绩（单位：个），依次为9，11，8，10，13，14，16，22，则该组数据的第75百分位数为（　）

A．14　　B．15　　C．16　　D．19

4．已知向量$\vec{a}=(x,4)$，$\vec{b}=(1,x)$，则“$x=2$”是“$\vec{a}//\vec{b}$”的（　）

A．既不充分也不必要条件　　B．充分不必要条件

C．必要不充分条件　　D．充要条件

5．已知直线$y=2x+3$与曲线$y=e^{x-a}+x$相切，则实数$a=$（　）

A．-2　　B．1　　C．2　　D．4

6．已知$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\cos\alpha=\frac{1}{4}$，则$\sin 2\alpha=$（　）

A．$-\frac{7}{8}$　　B．$-\frac{1}{8}$　　C．$\frac{1}{8}$　　D．$\frac{7}{8}$

7．已知x，$y\in\mathbf{R}$，$a>1$，$b>1$，若$a^x=b^y=8$，且$ab=16$，则$x+y$的最小值为（　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{3}{2}$　　C．2　　D．3

8．在$(x+y+z+1)^{n+3}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$的展开式中，含$xyz$的项的系数为$a_n$，记数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的前$n$项和为$S_n$．若不等式$S_n<m$恒成立，则实数$m$的最小值为（　）

A．$\frac{1}{6}$　　B．$\frac{1}{9}$　　C．$\frac{1}{12}$　　D．$\frac{1}{18}$

二、选择题：本大题共3小题，每小题6分，共计18分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．

9．已知复数z满足$z(1-\mathrm{i})=3+4\mathrm{i}$，则（　）

A．z的虚部为$\frac{7}{2}\mathrm{i}$　　B．$z+\frac{1}{2}$是纯虚数

C．$|z|=\frac{5\sqrt{2}}{2}$　　D．$\overline{z}=\frac{1}{2}-\frac{7}{2}\mathrm{i}$

10．已知函数$f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x+\sin^2 x$，则（　）

A．$f(x)$在区间$\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$上单调递减

B．$f(x)$的最大值为$\frac{3}{2}$

C．$f(x)$的图象可由$y=\sin 2x$的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度，再向上平移$\frac{1}{2}$个单位长度得到

D．$f(x)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{12},\frac{1}{2}\right)$成中心对称图形

11．已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，$y=f(x+1)-2$是奇函数，$y=f(2x+3)$是偶函数，且$f(2025)+f(2026)=7$，则（　）

A．$f(x)+f(x+4)=4$　　B．4是$f(x)$的一个周期

C．$f(0)=-1$　　D．$\sum_{k=1}^{2026}f(k)=4055$

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分．

12．若$f(x)=\begin{cases}f(x+2),x<1\\ \log_3(x+1),x\geq 1\end{cases}$，则$f(0)=$_____．

13．一个口袋里装有4个红球和2个白球，这些球除颜色外完全相同．现从中任意取出3个小球，设变量X为取出的3个小球中红球的个数，则X的数学期望$E(X)=$_____．

14．以平衡位置为原点，忽略阻力时，弹簧振子做简谐振动，位移随时间变化可表示为余弦型函数．记弹簧振子在时刻t的位移为$f(t)$（位移单位：cm，时间t单位：s），称$f(t)=0$的时刻为过零时刻，对应弹簧振子经过平衡位置．若在时段(a,b)内（端点不计入）恰有k个过零时刻，就称(a,b)为k次过零时段$(k\in\mathrm{N})$．已知某弹簧振子的位移满足$f(t)=\cos\left(\omega t-\dfrac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$，且$\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$是0次过零时段，则$\omega$的取值范围是_____．

四、解答题：本大题共5小题，共77分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15．已知函数$f(x)=x^3-3ax+2(a\in\mathbf{R})$在$x=1$处取得极值．

(1)若直线$y=b$与曲线$y=f(x)$有三个不同的交点，求实数b的取值范围；

(2)求$f(x)$在区间$[-1,3]$上的最大值与最小值．

16．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=2$，且$S_{n+1}=3S_n+2\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$．

(1)证明：数列$\{S_n+1\}$是等比数列，并求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$b_n=\left(n-\dfrac{1}{2}\right)a_n$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$．

17．在$\triangle ABC$中，三个角A，B，C所对的边分别是a，b，c．已知向量$\vec{m}=(b-2a,c)$，$\vec{n}=(\cos C,\cos B)$，且$\vec{m}\perp\vec{n}$．

(1)求C；

(2)记$\triangle ABC$外接圆的圆心为O，边BC的中点为D，若$AD=\sqrt{7}$，$a=2$，求$\cos\angle OAD$的值．

18．为探究环境温度对某型号纯电动汽车实际续航里程的影响，某新能源汽车企业随机抽取一辆该型号试验车，在车速、路况、载重等变量保持一致的前提下，分别在5种不同环境温度下开展满电续航测试．测得环境温度x（单位：℃）与实测续航里程y（单位：km）的对应数据如下表：

环境温度x（℃）	−5	0	5	10	20
实测续航里程y（km）	260	265	280	305	330

与此同时，为研究冬季启动电池预热功能对车辆实际续航的影响，该企业随机抽取200名该型号车主开展问卷调查．规定：冬季实际续航里程不低于280 km（即标称续航350 km的80%）为“续航达标”．调查结果如下列联表所示：

电池预热功能	续航	合计

	达标	未达标	
冬季启用	75	25	100
冬季未启用	55	45	100
合计	130	70	200

(1)求实测续航里程 y 关于环境温度 x 的线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，并预测当环境温度为 25℃时，该车的实测续航里程；

(2)依据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，分析冬季启用电池预热功能与续航达标是否有关联；

(3)根据列联表数据，用样本分布的频率估计总体分布的概率．从该型号纯电动汽车中随机抽取 10 辆（假设该型号汽车的总体数量远大于 10），记 X 为这 10 辆电动汽车中“冬季续航未达标”的辆数，令 $P(k)=P(X=k)(k=0,1,2,\ldots,10)$，求 $P(k)$ 取最大值时 k 的值．

参考公式或数据：

线性回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中，系数 $\hat{b}$，$\hat{a}$ 由下式确定：$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$；

参考数据：$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})=1110$；

独立性检验统计量：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$．临界值表如下：

α	0.1	0.05	0.01	0.001
χ_α	2.706	3.841	6.635	10.828

19．已知函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{a(x-1)}{2\sqrt{x}}(a\in\mathbf{R})$．

(1)当 $a=2$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

(2)当 $x>1$ 时，$f(x)<0$，求 a 的取值范围；

(3)设 $n\in\mathbf{N}^*$，求证：$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{k(k+2)}}<\ln\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}<\sum_{k=1}^{n}\dfrac{2}{\sqrt{k(k+2)}}$．