高中 2024 级第一次诊断性考试

数学参考答案及评分标准

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1．A　2．C　3．B　4．D　5．B　6．C　7．B　8．D

二、选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。全部选对的得 6 分，选对但不全的得部分分，有选错的得 0 分。

9．AD　10．ACD　11．ABD

三、填空题：本题共 3 个小题，每小题 5 分，共 15 分。

12．$-\frac{3}{5}$；　13．2，2^n；　14．$[0,+\infty)$

四、解答题：本题共 5 小题，第 15 题 13 分，第 16、17 小题 15 分，第 18、19 小题 17 分，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15．**解**：（1）由表中数据计算得：$\overline{t}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$，……1 分

$\overline{y}=\frac{8+10+13+16+18}{5}=\frac{65}{5}=13$，$\sum_{i=1}^{5}t_i^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$．……3 分

又$\sum_{i=1}^{5}t_iy_i=221$，n=5，由最小二乘估计公式得：

$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}t_iy_i-n\overline{t}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{5}t_i^2-n\overline{t}^2}=\frac{221-5\times3\times13}{55-5\times3^2}=\frac{221-195}{55-45}=\frac{26}{10}=2.6$，……6 分

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{t}=13-2.6\times3=5.2$，……7 分

所以 y 关于 t 的经验回归方程为 $\hat{y}=2.6t+5.2$．……8 分

（2）2028 年对应的年份代码为 t＝8，……9 分

将其代入（1）中的回归方程得：$\hat{y}=2.6\times8+5.2=26$（千架），……12 分

故预测该市 2028 年无人机注册数量约为 26 千架（即 2.6 万架）．……13 分

16．**解**：（1）设等差数列$\{a_n\}$的首项为 a_1，公差为 d（且 $d\neq0$），则 $a_n=a_1+(n-1)d$．……1 分

由 $a_3=a_1+a_2$，则 $a_1+2d=a_1+(a_1+d)$，化简可得 $a_1=d$，……3 分

$\therefore a_n=d+(n-1)d=dn$，……4 分

由 $a_nb_n=n^2+3n$，且 $d\neq0$，……5 分

两边同时除以 a_n，得 $b_n=\frac{n+3}{d}$，所以$b_{n+1}-b_n=\frac{n+4}{d}-\frac{n+3}{d}=\frac{1}{d}$，……7 分

∴数列$\{b_n\}$是以 $b_1=\frac{4}{d}$ 为首项，$\frac{1}{d}$ 为公差的等差数列；……8 分

（2）由（1）知：$a_n=dn$，$b_n=\frac{n+3}{d}$，……9 分

故 $S_6=\frac{6(a_1+a_6)}{2}=21d$，$T_6=\frac{6(b_1+b_6)}{2}=3(\frac{4}{d}+\frac{9}{d})=\frac{39}{d}$，……11 分

由 $S_6+T_6=60$，得 $21d+\frac{39}{d}=60$，则 $7d^2-20d+13=0$，……13 分

∴$(7d-13)(d-1)=0$，解得：$d=1$ 或 $d=\frac{13}{7}$，……14 分

∴$b_n=n+3$ 或 $b_n=$　$(n+3)$．……15 分

17．解：（1）∵ $f(x)=4\sin x\cos(x-\frac{\pi}{4})-\sqrt{2}=2\sqrt{2}(\sin x\cos x+\sin^2 x)-\sqrt{2}$，……1 分

∴ $f(x)=\sqrt{2}\sin 2x-\sqrt{2}\cos 2x$，……2 分

∴ $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{4})$，……3 分

令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，……4 分

可得 $-\frac{\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{8}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，……5 分

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为：$[-\frac{\pi}{8}+k\pi,\frac{3\pi}{8}+k\pi]$，$k\in\mathbf{Z}$；……6 分

（2）∵ $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{4})$，则 $g(x)=f(x+\frac{3\pi}{8})$，……7 分

∴ $g(x)=f(x+\frac{3\pi}{8})=2\sin[2(x+\frac{3\pi}{8})-\frac{\pi}{4}]=2\cos 2x$，……8 分

∴ $g(\theta)=2\cos 2\theta$，$g(\frac{\theta}{2})=2\cos\theta$，……10 分

又 $g(\frac{\theta}{2})=g^2(\theta)-2$，

∴ $2\cos\theta=4\cos^2 2\theta-2$，则 $\cos\theta=2\cos^2 2\theta-1=\cos 4\theta$，……11 分

∴ $4\theta=\theta+2k\pi$，或 $4\theta+\theta=2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，……13 分

∴ $\theta=\frac{2k\pi}{3}$ 或 $\theta=\frac{2k\pi}{5}$，$k\in\mathbf{Z}$，……14 分

又 $\theta\in(0,\ \pi)$，

∴ $\theta=\frac{2\pi}{3}$，$\theta=\frac{2\pi}{5}$ 或 $\theta=\frac{4\pi}{5}$．……15 分

18．解：（1）$f'(x)=x^2-2(a+1)x+4a$，故 $f'(6)=36-12(a+1)+4a=24-8a$，……1 分

又 $f(6)=72-36(a+1)+24a+b=36-12a+b$．……2 分

切线方程为 $y-f(6)=f'(6)(x-6)$，代入点 $(\frac{9}{2},0)$，

得 $-(36-12a+b)=(24-8a)\times(-\frac{3}{2})=-36+12a$，……3 分

∴$b=0$．……4 分

（2）$f'(x)=x^2-2(a+1)x+4a=(x-2)(x-2a)$，其零点为 2 与 $2a$，……5 分

①当 $a=1$ 时，$f'(x)=(x-2)^2\geqslant 0$，$f(x)$在**R**上单调递增；……6 分

②当 $a>1$ 时，$2a>2$，$f(x)$在$(-\infty,2)$和$(2a,+\infty)$上单调递增，在$(2,2a)$上单调递减；……7 分

③当 $a<1$ 时，$2a<2$，$f(x)$在$(-\infty,2a)$和$(2,+\infty)$上单调递增，在$(2a,2)$上单调递减．……8 分

（3）本题核心概念理解：最大值的定义（函数的最大值不小于该区间内任一点处的函数值）．注意到 $m>4$ 时，只有极值点 2 和端点 m 能确定一定在区间$[0,m]$内，故需先从 $f(m)$，$f(2)$ 考虑．

方法一：①当$|f(m)|\geqslant\frac{4m}{3}$时，则由 $h(a)\geqslant|f(m)|$，即得 $h(a)\geqslant\frac{4m}{3}$；……9 分

②当$|f(m)|<\frac{4m}{3}$时，即 $f(m)<\frac{4m}{3}$ 即 $\frac{m^3}{3}-m^2-am(m-4)<\frac{4m}{3}$，……10 分

∴ $am(m-4)>\frac{m^3}{3}-m^2-\frac{4m}{3}=\frac{m(m-4)(m+1)}{3}$，……11 分

因为 $m>4$，则 $m(m-4)>0$，两边同除以正数 $m(m-4)$，

得 $a>\frac{m+1}{3}$，……13 分

∴ $f(2)=4a-\frac{4}{3}>\frac{4(m+1)}{3}-\frac{4}{3}=\frac{4m}{3}$，……15 分

所以 $h(a)\geqslant|f(2)|=f(2)>\frac{4m}{3}$，……16 分

综上所述，对任意实数 a，都有 $h(a)\geqslant\frac{4m}{3}$．……17 分

方法二：由（1）知 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-(a+1)x^2+4ax$．

∴ $f(m)-\frac{4m}{3}=\frac{1}{3}m^3-(a+1)m^2+4am-\frac{4m}{3}$……9 分

$=\frac{m}{3}(m^2-4)-m^2+a(4m-m^2)$……10 分

$=\frac{m}{3}(m-4)(m+1)-am(m-4)$……11 分

$=m(m-4)(\frac{m+1}{3}-a)$……12 分

由 $m>4$ 知，$m(m-4)>0$，

∴ $f(m)-\frac{4m}{3}\geqslant 0$ 等价于 $a\leqslant\frac{m+1}{3}$，……13 分

①当 $a\leqslant\frac{m+1}{3}$ 时，则 $f(m)\geqslant\frac{4m}{3}>0$，

∴ $h(a)\geqslant|f(m)|=f(m)\geqslant\frac{4m}{3}$；……14 分

②当 $a>\frac{m+1}{3}$ 时，由 $f(2)=4a-\frac{4}{3}\geqslant\frac{4(m+1)}{3}-\frac{4}{3}>\frac{4m}{3}$，……15 分

∴ $h(a)\geqslant g(2)=|f(2)|=|4a-\frac{4}{3}|>\frac{4m}{3}$，……16 分

综上，对任意实数 a，都有 $h(a)\geqslant\frac{4m}{3}$．……17 分

由方法一、方法二知对于任意实数 a，$f(m)$、$f(2)$ 至少有一个是大于等于 $\frac{4m}{3}$ 的，因此方法二也可以采用反证法进行证明.

方法三： ∵ $f(2)=\frac{8}{3}-4(a+1)+8a=4a-\frac{4}{3}$，

$f(m)=\frac{m^3}{3}-(a+1)m^2+4am=\frac{m^3}{3}-m^2-am(m-4)$．……9 分

可得恒等式：$4f(m)-m(4-m)f(2)=\frac{4m^3}{3}-4m^2-\frac{4m}{3}(m-4)=\frac{4m}{3}(m-2)^2$．（*）……10 分

又 $m>4$，故 $2\in[0,m]$，则 $h(a)=|f(x)|_{\max}\geqslant|f(2)|$，且 $h(a)\geqslant|f(m)|$．……11 分

对（*）式两边取绝对值，由绝对值不等式得

$\frac{4m}{3}(m-2)^2=|4f(m)-m(4-m)f(2)|\leqslant 4|f(m)|+m(m-4)|f(2)|$ ……12 分

$\leqslant 4h(a)+m(m-4)h(a)=[4+m(m-4)]h(a)=(m-2)^2h(a)$．……14 分

因为 $m>4$，所以 $(m-2)^2>0$，两边同时除以 $(m-2)^2$，得 $h(a)\geqslant\frac{4m}{3}$，

当且仅当 $a=\frac{m+1}{3}$ 时等号成立．……16 分

故对任意实数 a，$h(a)\geqslant\frac{4m}{3}$ 成立．……17 分

19．**解：**（1）由 $g(x)=2\ln(x+1)+x^2-2x$（$0\leqslant x\leqslant 1$），$g'(x)=\frac{2x^2}{x+1}\geqslant 0$，……1 分

∴ $g(x)$ 在[0，1]上单调递增，……2 分

∴ $g(x)$ 在[0，1]的最小值为 0；……3 分

（2）令 $h(x)=\sin x-2\ln(x+1)+x$，$x\in(0,1]$，

因为 $h'(x)=\cos x-\frac{2}{x+1}+1$，且 $h(0)=0$，$h'(0)=0$，

$\therefore h''(x)=-\sin x+\frac{2}{(x+1)^2}$，易知$h''(x)$在(0，1]上是减函数，……4分

由$h''(0)=2>0$，$h''(1)=\frac{1}{2}-\sin 1<0$，

$\therefore$存在唯一的零点x_0，使得$h''(x_0)=0$，……5分

$\therefore x\in(0，x_0]$，$h''(x)>0$，$h'(x)$单调递增；

$x\in[x_0，1)$，$h''(x)<0$，$h'(x)$单调递减；……6分

又$h'(0)=0$，$h'(1)=\cos 1>0$，

$\therefore x\in(0，1]$，$h'(x)>0$，

$\therefore h(x)$在(0，1]单调递增，又$h(0)=0$，则$h(x)>0$，……7分

$\therefore f(x)<\sin x$；……8分

（3）先证$\{a_n\}$为单调递减数列，且$0<a_k\leqslant\frac{1}{2}$.

$\because f(x)=2\ln(x+1)-x$，$\therefore$当$x\in(0，1)$，$f'(x)=\frac{1-x}{x+1}>0$

$\therefore f(x)$在（0，1）单调递增，$\therefore f(x)>f(0)=0$ $\because a_1=\frac{1}{2}$ $\therefore a_{k+1}=f(a_k)>0$

又$\because a_{k+1}-a_k=2\ln(1+a_k)-2a_k=2[\ln(1+a_k)-a_k]$，

易知$x\neq 0$时，$\ln(x+1)<x$，则$a_{k+1}-a_k<0$，即$\{a_n\}$为单调递减数列

$\therefore 0<a_k\leqslant\frac{1}{2}$，……10分

由（1）知，$x\in(0，1]$，$g(x)>0$，则$f(x)>x-x^2$，

$\therefore a_{k+1}=f(a_k)>a_k-a_k^{\,2}=a_k(1-a_k)$，……11分

又$0<a_k\leqslant\frac{1}{2}$，

$\therefore \frac{a_{k+1}}{a_k}>\frac{a_k(1-a_k)}{a_k}=1-a_k\geqslant 1-a_1=\frac{1}{2}$，……13分

$\therefore$由累乘法得：$a_{k+1}>(\frac{1}{2})^{k+1}$，……15分

因为$a_{k+1}=2\ln(1+a_k)-a_k<\sin a_k=b_k$，

$\therefore b_k>a_{k+1}>(\frac{1}{2})^{k+1}$，……16分

$\therefore \sum_{k=1}^{n}b_k>\sum_{k=2}^{n+1}a_k>\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+.....+\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}$.……17分