锦宏教育微信公众号：jh985211　　锦宏教育客服微信：18117901643

秘密★启用前

高中 2024 级第一次诊断性考试

数　学

注意事项：

1．考生领到答题卡后，须在规定区域填写本人的姓名、准考证号、座位号和班级。

2．考生回答选择题时，选出每小题答案后，须用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。考生回答非选择题时，须用 0.5mm 黑色字迹签字笔将答案写在答题卡上。选择题和非选择题的答案写在试卷或草稿纸上无效。

3．考生不得将试卷、答题卡和草稿纸带离考场，考试结束后由监考员收回。

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知 $x>0$，$y>0$，且 $x+y=2$，则 xy 的最大值为

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．2　　D．4

2．已知集合 $A=\{0,1,2,3\}$，$B=\{x\mid \lg x>0\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{0,1,2,3\}$　　B．$\{1,2,3\}$　　C．$\{2,3\}$　　D．$\{3\}$

3．设 $x\in\mathbf{R}$，则“$\tan x=1$”是“$x=\frac{\pi}{4}$”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

4．已知 $a>b>0$，$c>0$，则下列不等式一定正确的是

A．$b+c>a$　　B．$c^a>c^b$　　C．$a^c<b^c$　　D．$ac>bc$

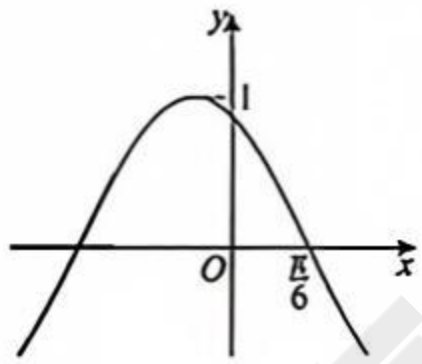
5．在量子存储实验中，量子态的保真度 F 随存储时间 t（单位：微秒）呈指数衰减，满足模型 $F(t)=F_0\cdot 2^{-\frac{t}{\tau}}$，其中 F_0 为初始保真度（$F_0>0$），τ 为特征时间常数．若保真度不低于初始保真度的 $\frac{1}{32}$，则存储时间 t 与 τ 的比值最大为

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

6．设 $f(x)$ 是 R 上的奇函数，且满足 $f(x+4)+f(2)=f(x)$，则 $f(-8)=$

A．-4　　B．-2　　C．0　　D．2

7. 函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$ 的部分图象如图所示，将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位后，得到函数 $g(x)$ 的图象，则 $g(\frac{\pi}{6})=$



A．0　　B．$\frac{1}{2}$

C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. 已知 $a=\log_2 3$，$b=\log_4 7$，$c=\frac{8}{5}$，则

A．$a>b>c$　　B．$a>c>b$　　C．$b>c>a$　　D．$c>a>b$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^{x+1}-x-c, & x\leqslant 0,\\ f(-x), & x>0,\end{cases}$ 下列结论正确的有

A．$f(x)$ 是偶函数　　B．$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增

C．$f(x)$ 仅有两个零点　　D．若 $x>0$，则 $f(x)<x$

10. 已知函数 $f(x)=(1+\cos x)\sin x$，则

A．$f(x)$ 的图象关于 $(\pi,0)$ 对称　　B．$f(x)$ 的最小正周期为 π

C．$\frac{\pi}{3}$ 为 $f(x)$ 的一个极大值点　　D．$f(x)$ 的值域为 $[-\frac{3\sqrt{3}}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4}]$

11. 已知正项等比数列 (a_n) 与等差数列 (b_n) 的首项均为 1，且 $a_3+b_5=13$，$a_5+b_3=21$．将乘积 $a_ib_j(i,j\in\mathbf{N}^*,i\leqslant j)$ 按如下方式排成三角形数表，其中第 j 行依次为 $a_1b_j,a_2b_j,\cdots$，a_jb_j．记 S_n 为第 1 行至第 n 行所有数的和．

第 1 行：a_1b_1

第 2 行：a_1b_2　a_2b_2

第 3 行：a_1b_3　a_2b_3　a_3b_3

……

第 n 行：a_1b_n　a_2b_n　……　a_nb_n

下列结论正确的有

A．(a_n) 的公比为 2　　B．第 j 行所有数的和为 $(2j-1)(2^j-1)$

C．$\exists n\in\mathbf{N}^*$，S_n 与 n 的奇偶不同　　D．$S_{n+2}>3S_{n+1}-2S_n$

锦宏教育微信公众号：jh985211　　锦宏教育客服微信：18117901643

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知 $\sin\alpha=\frac{3}{5}$，则 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})=$_____.

13. 记数列 (a_n) 的前 n 项和为 S_n，且满足 $S_n=a_1(a_n-1)$，$a_1\neq0$，则 $a_1=$_____，

$a_n=$_____.

14. 已知函数 $f(x)=3^x-1$．若对 $\forall x_1\in(-\infty,0)$，关于 x 的方程 $f(x_1)-f(x)=2f(x_1-x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上至少有一个解，则实数 a 的取值范围是_____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. （13 分）

近年，我国低空经济产业快速发展，无人机应用日益广泛．下表是某市 2021—2025 年无人机注册数量 y（单位：千架）的统计数据，其中 t 为对应年份的代码．

年份	2021	2022	2023	2024	2025
t	1	2	3	4	5
y	8	10	13	16	18

（1）根据以上数据，求 y 关于 t 的经验回归方程；

（2）利用（1）中的回归方程，预测该市 2028 年无人机注册数量．

参考数据：$\sum_{i=1}^{5}t_iy_i=221$．参考公式：回归直线 $\hat{y}=\hat{b}t+\hat{a}$ 中斜率和截距的最小二乘估计分别为：$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}t_iy_i-n\bar{t}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}t_i^2-n\bar{t}^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}$．

16. （15 分）

已知数列 (a_n) 是公差不为零的等差数列，且 $a_3=a_1+a_2$，数列 (b_n) 满足 $a_nb_n=n^2+3n$.

（1）证明：(b_n) 为等差数列；

（2）记 (a_n)，(b_n) 的前 n 项和分别为 S_n，T_n，且 $S_6+T_6=60$，求 (b_n) 的通项公式.

17. （15 分）

已知函数 $f(x)=4\sin x\cos(x-\frac{\pi}{4})-\sqrt{2}$.

（1）求 $f(x)$ 的单调递增区间；

（2）若 $g(x)=f(x+\frac{3\pi}{8})$，$\theta\in(0,\pi)$，且满足 $g(\frac{\theta}{2})=g^2(\theta)-2$，求 θ 的值.

锦宏教育微信公众号：jh985211　　锦宏教育客服微信：18117901643

18. （17 分）

已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-(a+1)x^2+4ax+b$，曲线 $y=f(x)$ 在 $(6, f(6))$ 处的切线经过点 $(\frac{9}{2}, 0)$.

（1）求实数 b 的值；

（2）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（3）m 为给定常数，且 $m>4$. 若 $g(x)=|f(x)|$，且设 $g(x)$ 在 $[0, m]$ 上的最大值为 $h(a)$.

证明：对任意实数 a，$h(a)\geqslant\frac{4m}{3}$.

19. （17 分）

已知函数 $f(x)=2\ln(x+1)-x$.

（1）求函数 $g(x)=f(x)+x^2-x$ 在 $[0, 1]$ 上的最小值；

（2）对任意 $x\in(0, 1]$，试比较 $f(x)$ 与 $\sin x$ 的大小，并说明理由；

（3）数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{2}$，且 $a_{n+1}=f(a_n)$. 设 $b_n=\sin a_n$，证明：$\sum_{i=1}^{n}b_i>\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}$.