

数学(SC1)参考答案、解析与评分标准

ZJ-1203256895155-GZ3-26Q-ZHLJIAN1

AI 质检

一、选择题：共 8 小题，每小题 5 分，满分 40 分。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
D	A	D	B	D	C	B	B	ACD	ACD	BC

1. D

【知识点】复数的除法运算、判断复数对应的点所在的象限

【分析】利用复数的运算法则和几何意义即可得出。

【详解】根据题意 $zi = 1 - 2z \Rightarrow z(i + 2) = 1$, 即 $z = \frac{1}{i+2} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$, 则复数 z 在复平面内对应的点为 $(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$ 位于第四象限,

故选: D

2. A

【知识点】分式不等式

【详解】由 $\frac{x-3}{x-1} \geq 2$ 化简得 $\frac{x-1}{x-1} \geq 0$, 即 $\begin{cases} (x-1)(-x-1) \geq 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$, 解得 $-1 \leq x < 1$,所以不等式 $\frac{x-3}{x-1} \geq 2$ 的解集是 $\{x | -1 \leq x < 1\}$.

3. D

【知识点】判断一般幂函数的单调性、判断指数函数的单调性、根据解析式直接判断函数的单调性

【分析】对选项逐一分析函数的单调性, 由此选出正确选项.

【详解】对于 A: $f(x) = -x$, 由一次函数性质, $f(x)$ 为减函数, 不满足题意, 故 A 错误;对于 B: $f(x) = (\frac{3}{4})^x$, 由指数函数的性质可知 $f(x)$ 为减函数, 不满足题意, 故 B 错误;对于 C: $f(x) = x^2$, 由幂函数的性质可知 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为减函数, 不满足题意, 故 C 错误;对于 D: $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$, 由幂函数的性质可知, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 为增函数, 满足题意, 故 D 正确.

故选: D.

4. B

【知识点】已知方程求双曲线的渐近线

【分析】首先求渐近线的斜率, 再代入两直线的夹角公式, 即可求解.

【详解】双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \sqrt{5}x$, 所以两条渐近线的斜率 $k = \pm \sqrt{5}$,记所求角为 β , 则 $\tan \beta = \left| \frac{\sqrt{5}(-\sqrt{5})}{1+\sqrt{5} \times (-\sqrt{5})} \right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

故选: B

5. D

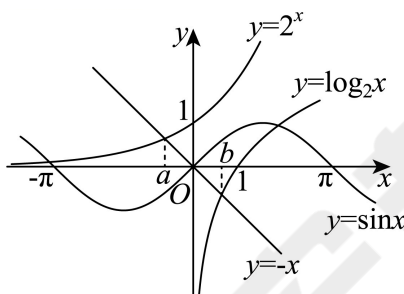
【知识点】比较零点的大小关系、对数函数图象的应用、指数函数图像应用、正弦函数图象的应用

【分析】将问题转化为 $y=2^x$ 、 $y=\log_2 x$ 、 $y=\sin x$ 与 $y=-x$ 的交点，数形结合即可判断。

【详解】函数 $f(x)=2^x+x$ ， $g(x)=\log_2 x+x$ ， $h(x)=\sin x+x$ 的零点，

转化为 $y=2^x$ ， $y=\log_2 x$ ， $y=\sin x$ 与 $y=-x$ 的图象的交点的横坐标，因为零点分别为 a, b, c

在坐标系中画出 $y=2^x$ ， $y=\log_2 x$ ， $y=\sin x$ 与 $y=-x$ 的图象如图：



可知 $a < 0$ ， $b > 0$ ， $c = 0$ ，则 $b > c > a$ 。

6. C

【知识点】对数的运算

【分析】由题可知，前后两传输公式作差，结合题设数量关系及对数运算，即可得出结果。

【详解】设 L' 是变化后的传输损耗， F' 是变化后的载波频率， D' 是变化后的传输距离，
则 $L' = L + 60$ ， $F' = 100F$ ， $60 = L' - L = 20\lg D' + 20\lg F' - 20\lg D - 20\lg F =$

$20\lg \frac{D'}{D} + 20\lg \frac{F'}{F}$ ，则 $20\lg \frac{D'}{D} = 60 - 20\lg \frac{F'}{F} = 60 - 40 = 20$ ，即 $\lg \frac{D'}{D} = 1$ ，

从而 $D' = 10D$ ，故传输距离变为原来的 10 倍。

故选：C

7. B

【知识点】余弦定理解三角形

【分析】用余弦定理计算即可得出结果。

【详解】因为 $a=3$ ， $b=5$ ， $C=\frac{2\pi}{3}$ ，且 $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ ，

所以 $c^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \times \cos \frac{2\pi}{3} = 9 + 25 - 2 \times 3 \times 5 \times (-\frac{1}{2}) = 34 + 15 = 49$ ，

因为 $c > 0$ ，所以 $c = \sqrt{49} = 7$ 。

8. B

【知识点】根据函数零点的个数求参数范围、利用导数研究函数的零点

【分析】求导，根据导数作出函数 $f(x)$ 的图象，数形结合求解参数范围即可。

【详解】当 $x > 0$ 时， $f(x) = \ln x + 2 - \frac{2}{e}$ ，可以看作函数 $y = \ln x$ 向上平移 $2 - \frac{2}{e}$ 个单位，

当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = 2xe^x$, 则 $f'(x) = 2e^x + 2xe^x = 2e^x(1+x)$,

因为当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f'(x) > 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 在 $(-1, 0)$ 上单调递增,

$$f(-1) = -\frac{2}{e}, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 2 - \frac{2}{e},$$

作出函数 $f(x)$ 图象如下图,

令 $g(x) = k(x+1) - \frac{2}{e}$, 则 $g(x)$ 过定点 $(-1, -\frac{2}{e})$,

当 $g(x)$ 过原点时, 即 $k = \frac{0 - (-\frac{2}{e})}{0 - (-1)} = \frac{2}{e}$ 时, $f(x)$ 图象与 $g(x)$ 图象有 4 个交点,

$x > 0$ 时, $f'(x) = \frac{1}{x}$, 当 $g(x)$ 图象与 $f(x)$ 图象相切时, 设切点为 $(x_0, \ln x_0 + 2 - \frac{2}{e})$,

$$\text{此时 } y - (\ln x_0 + 2 - \frac{2}{e}) = \frac{1}{x_0}(x - x_0),$$

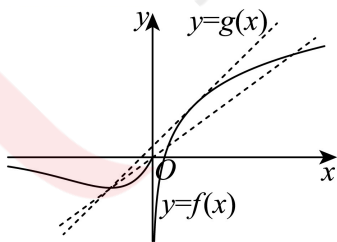
$$\text{将 } (-1, -\frac{2}{e}) \text{ 代入得 } -\frac{2}{e} - (\ln x_0 + 2 - \frac{2}{e}) = \frac{1}{x_0}(-1 - x_0),$$

整理得 $\ln x_0 - \frac{1}{x_0} + 1 = 0$, 因为 $y = \ln x_0 - \frac{1}{x_0} + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{又 } y = \ln 1 - \frac{1}{1} + 1 = 0, \text{ 所以 } x_0 = 1,$$

当 $x_0 = 1$ 时, $k = 1$, $g(x)$ 图象与 $f(x)$ 图象相切, 有两个交点.

所以方程 $f(x) = k(x+1) - \frac{2}{e}$ 有三个根, k 的取值范围为 $(\frac{2}{e}, 1)$.



二、选择题：共 3 小题，每小题 6 分，满分 18 分。

9. ACD

【知识点】二项展开式各项的系数和、奇次项与偶次项的系数和、求指定项的系数

【详解】对于 $(1-x)^9 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_9x^9$,

令 $x = 0$, 可得 $a_0 = 1$, 故 A 正确;

令 $x = 1$, 可得 $a_0 + a_1 + \dots + a_9 = 0$ ①, 则 $a_1 + a_2 + \dots + a_9 = -1$, 故 B 错误;

令 $x = -1$, 可得 $a_0 - a_1 + \dots - a_9 = 2^9 = 512$ ②,

由①+②，得 $2(a_0 + a_2 + \cdots + a_8) = 512$ ，即 $a_0 + a_2 + \cdots + a_8 = 256$ ，故 D 正确；

因 $(1-x)^9$ 的第 2 项为 $T_2 = C_9^1 \times 1^8 \times (-x) = -9x$ ，即 $a_1 = -9$ ，

第 9 项为 $T_9 = C_9^8 \times 1 \times (-x)^8 = 9x^8$ ，即 $a_8 = 9$ ，所以 $a_1 + a_8 = 0$ ，故 C 正确。

10. ACD

【知识点】由对称性求函数的解析式、函数单调性、极值与最值的综合应用、利用导数研究不等式恒成立问题、用导数判断或证明已知函数的单调性

【分析】根据对称性，将 $f(x)$ 中 x 替换为 $-x$ 即可得到 $g(x)$ ，进而判断选项 A；

构造函数 $u(x) = f(x) - g(x)$ ，通过导数判断函数单调性求得 $u(x) > 0$ 即可判断选项 B；

将不等式变形，通过 $f(x)$ 单调性将不等式转化为 $x \geq \ln(ax)$ ，参变分离后转化为最值问题，

构造函数后通过导数判断函数单调性求得最值即可判断选项 C；

通过导数将 $h(x_0)$ 表示为关于 a 的函数，再通过导数判断函数单调性即可判断选项 D。

【详解】选项 A，由函数 $g(x)$ 与 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称，将 $f(x)$ 中 x 替换为 $-x$ ，

得 $g(x) = f(-x) = e^x - (-x) = e^x + x$ ，所以选项 A 正确；

选项 B，设 $u(x) = f(x) - g(x) = e^x - e^x - 2x$ ，则 $u'(x) = e^x + e^x - 2 \geq 2\sqrt{e^x \cdot e^x} - 2 = 0$ ，当且仅当 $e^x = e^x$ 即 $x = 0$ 时取等，

所以当 $x > 0$ 时， $u(x)$ 单调递增， $u(x) > u(0) = 0$ ，即 $f(x) > g(x)$

所以选项 B 错误；

选项 C，整理不等式得 $e^x - x \geq ax - \ln(ax)$ ，即 $f(x) \geq f(\ln(ax))$ ，

由 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增，得 $x \geq \ln(ax)$ ，即 $\ln a \leq x - \ln x$ 对 $x > 1$ 恒成立；

令 $k(x) = x - \ln x$ ，当 $x > 1$ 时， $k'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0$ ，所以 $k(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增，

$k(x) > k(1) = 1$ ，故 $\ln a \leq 1$ ，解得 $a \leq e$ ，即 a 的最大值为 e ，所以选项 C 正确；

选项 D， $h(x) = af(x) - g(x) = ae^x - e^x - (a+1)x$ ， $h'(x) = ae^x + e^x - (a+1) = \frac{(ae^x - 1)(e^x + 1)}{e^x}$ ，

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时，令 $h'(x) = 0$ ，解得 $x = \ln \frac{1}{2a}$ 或 $x = 0$ 且 $\ln \frac{1}{2a} > 0$ ，

所以当 $0 < x < \ln \frac{1}{2a}$ 时， $h'(x) < 0$ ；当 $x > \ln \frac{1}{2a}$ 时， $h'(x) > 0$ 。

所以 $h(x)$ 的极小值点 $x_0 = \ln \frac{1}{2a}$ ，代入得 $h(x_0) = 1 - a + (a+1)\ln a$ ，

令 $\varphi(a) = 1 - a + (a+1)\ln a$ ， $0 < a < \frac{1}{2}$ ， $\varphi'(a) = -1 + \frac{a+1}{a} + \ln a = \frac{1}{a} + \ln a$ ，

设 $m(a) = \frac{1}{a} + \ln a$ ，则 $m'(a) = -\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} = \frac{a-1}{a^2} < 0$ ，所以 $m(a)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 单调递减，

$m(a) > m(\frac{1}{2}) = 2 - \ln 2 > 0$, 因此 $\varphi'(a) > 0$, 所以 $\varphi(a)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 单调递增,

故 $\varphi(a) < \varphi(\frac{1}{2}) = \frac{1-3\ln 2}{2}$, 即 $h(x_0) < \frac{1-3\ln 2}{2}$.

11. BC

【知识点】坐标计算向量的模、利用数量积求参数、数量积的坐标表示、平面向量线性运算的坐标表示

【详解】先由点 $A(1, 2)$, $B(1+t, 2-2t)$, 得 $\overrightarrow{AB} = (t, -2t)$,

由 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{10}$, 得 $\sqrt{t^2 + (-2t)^2} = \sqrt{5}|t| = \sqrt{10}$, 解得 $t = \pm\sqrt{2}$.

又由 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OA} = t + 2(-2t) = -3t < 0$, 得 $t > 0$, 则 $t = \sqrt{2}$,

因此 $\overrightarrow{AB} = (\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$, 点 $B(1+\sqrt{2}, 2-2\sqrt{2})$, 故 A 错误, B 正确.

将 $\overrightarrow{AB} = (\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ 绕点 A 逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$, $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

得: $\overrightarrow{AP} = (\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - (-2\sqrt{2}) \times \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + (-2\sqrt{2}) \times \frac{\sqrt{2}}{2}) = (3, -1)$,

因此点 P 的坐标为 $(1+3, 2-1) = (4, 1)$, 故 C 正确.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = (\sqrt{2}, -2\sqrt{2}) \cdot (3, -1) = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$, 故 D 错误.

三、填空题: 共 3 小题, 每小题 5 分, 满分 15 分.

12. $\frac{5}{2}$

【知识点】已知模求数量积、垂直关系的向量表示、数量积的运算律

【详解】因为 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 所以 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\frac{\pi}{3} = 2 \times 4 \times \frac{1}{2} = 4$.

因为 $(k\vec{a} - \vec{b}) \perp (\vec{a} + \vec{b})$, 所以

$$(k\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a}^2 - \vec{b}^2 + (k-1)\vec{a} \cdot \vec{b} = 4k - 16 + 4(k-1) = 8k - 20 = 0,$$

解得 $k = \frac{5}{2}$.

13. 4

【知识点】基本不等式求和的最小值、根据函数是幂函数求参数值、由幂函数的单调性求参数、基本不等式“1”的妙用求最值、条件等式求最值

【分析】先根据幂函数的定义与单调性求出参数 m 的值, 进而根据“1”的妙用, 及基本不等式即可求解.

【详解】由 $f(x) = (m^2 - 5m + 7)x^{m^3}$ 是幂函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

$$\text{则} \begin{cases} m^2 - 5m + 7 = 1 \\ m - 3 < 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} (m-2)(m-3) = 0 \\ m < 3 \end{cases}, \text{解得 } m = 2,$$

$$\text{则 } a + 2b = m = 2, \text{ 即 } \frac{a}{2} + b = 1, \text{ 又 } a > 0, b > 0,$$

$$\text{所以 } \frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{b}\right) \left(\frac{a}{2} + b\right) = 1 + \frac{2b}{a} + \frac{a}{2b} + 1 \geq 2\sqrt{\frac{2b}{a} \cdot \frac{a}{2b}} + 2 = 4,$$

$$\text{当且仅当 } \frac{2b}{a} = \frac{a}{2b}, \text{ 即 } a = 1, b = \frac{1}{2} \text{ 时取等号,}$$

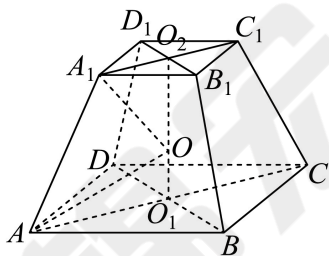
$$\text{所以 } \frac{2}{a} + \frac{1}{b} \text{ 的最小值为 } 4.$$

14. 33π

【知识点】球的表面积的有关计算

【分析】设出上下底面中心及外接球半径是 R , 根据正棱台及球的性质列出方程组可得球的半径进而即得.

【详解】



设 O_1 是下底面正方形中心, O_2 是上底面正方形中心, $O_1O_2 = h$ 为棱台的高, 外接球球心为 O ,

$$\text{则 } A_1B_1 = 2, AB = 4, AA_1 = \sqrt{6},$$

$$O_1A = \frac{\sqrt{4^2+4^2}}{2} = 2\sqrt{2}, O_2A_1 = \frac{\sqrt{2^2+2^2}}{2} = \sqrt{2},$$

$$h = \sqrt{AA_1^2 - (O_1A - O_2A_1)^2} = \sqrt{(\sqrt{6})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6-2} = 2, \text{ 即 } O_1O_2 = 2,$$

设球心 O 到下底面 O_1 的距离为 x , 则 O 到上底面 O_2 的距离为 $|2-x|$,

$$\text{外接球半径 } R \text{ 满足: } \begin{cases} R^2 = O_1A^2 + x^2 = (2\sqrt{2})^2 + x^2 = 8 + x^2 \\ R^2 = O_2A^2 + (2-x)^2 = (\sqrt{2})^2 + (2-x)^2 = 2 + (2-x)^2 \end{cases},$$

$$\text{解得 } x = \frac{1}{2}, R^2 = \frac{33}{4},$$

$$\text{所以正四棱台外接球的表面积是 } S = 4\pi R^2 = 33\pi.$$

四、解答题：共 5 小题，满分 77 分。

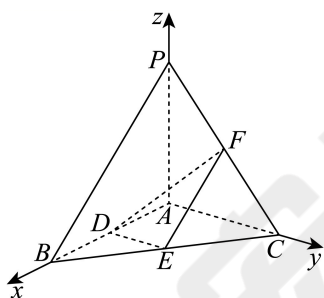
15. (满分 13 分)

【知识点】证明线面平行、线面角的向量求法、点到平面距离的向量求法

【分析】(1) 利用线面平行的判定定理求证；

(2) 以点 A 为坐标原点建系，计算平面的法向量，利用公式计算即可；

(3) 利用空间向量中点到平面的距离公式计算.

【详解】(1) 在 $\triangle PBC$ 中，因为 E, F 分别是 BC, PC 的中点，所以 $EF \parallel PB$ (1 分)因为 $EF \subset$ 平面 DEF , $PB \not\subset$ 平面 DEF ,所以 $PB \parallel$ 平面 DEF (2 分)(2) 因为 $PA \perp$ 平面 ABC , $AB, AC \subset$ 平面 ABC , 所以 $PA \perp AB$, $PA \perp AC$.因为 $AB \perp AC$, 所以 AB, AC, AP 两两垂直. (3 分)以点 A 为坐标原点, AB, AC, AP 所在的直线分别为 x, y, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系.

..... (5 分)

因为 $AB = AC = 1$, $PA = 2$, D, E, F 分别是棱 AB, BC, PC 的中点,所以 $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(0,1,0)$, $P(0,0,2)$, $D(\frac{1}{2}, 0, 0)$, $E(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, $F(0, \frac{1}{2}, 1)$,所以 $\overrightarrow{AP} = (0, 0, 2)$, $\overrightarrow{DE} = (0, \frac{1}{2}, 0)$, $\overrightarrow{DF} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ (7 分)设平面 DEF 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,
$$\begin{cases} \overrightarrow{DE} \cdot \vec{n} = \frac{y}{2} = 0, \\ \overrightarrow{DF} \cdot \vec{n} = -\frac{1}{2}x + \frac{y}{2} + z = 0. \end{cases}$$
 令 $z = 1$, 则 $y = 0$, $x = 2$, 所以 $\vec{n} = (2, 0, 1)$ (9 分)
设直线 PA 与平面 DEF 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{AP}| |\vec{n}|} = \frac{2}{2 \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$,故直线 PA 与平面 DEF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (11 分)(3) 由 (2) 得 $\overrightarrow{CE} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$, 平面 DEF 的一个法向量为 $\vec{n} = (2, 0, 1)$,所以点 C 到平面 DEF 的距离 $d = \frac{|\overrightarrow{CE} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ (13 分)

16. (满分 15 分)

【知识点】独立性检验解决实际问题、相关系数的意义及辨析、写出简单离散型随机变量分布

列、二项分布的均值、相关系数的计算、卡方的计算

【分析】(1) 根据相关系数的公式可求 r ，从而可判断两个变量线性相关；

(2) 求出 χ^2 ，与临界值比较后可得相应判断；

(3) 根据二项分布先求出 X 的分布列，根据期望公式可求 $E(X)$ ，或者直接根据二项分布的期望公式求得 $E(X)$ 。

【详解】(1) 由题知， $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$ ， $\bar{y} = \frac{8+10+13+25+24}{5} = 16$ ，…………… (1 分)

$$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = (-2) \times (-8) + (-1) \times (-6) + 0 \times (-3) + 1 \times 9 + 2 \times 8 = 47,$$

$$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 4 + 1 + 0 + 1 + 4 = 10, \quad \sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = 64 + 36 + 9 + 81 + 64 = 254,$$

$$\text{则 } r = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{47}{\sqrt{10} \times \sqrt{254}} = \frac{47}{2\sqrt{635}} \approx 0.933 > 0.75, \dots\dots\dots (3 \text{ 分})$$

故管理时间 y 与土地使用面积 x 线性相关。…………… (4 分)

(2) 依题意，完成表格如下：(单位：人)…………… (5 分)

	愿意参与管理	不愿意参与管理	合计
男性村民	150	50	200
女性村民	50	50	100
合计	200	100	300

零假设为 H_0 ：村民的性别与参与管理的意愿无关，

$$\text{计算可得 } \chi^2 = \frac{300 \times (150 \times 50 - 50 \times 50)^2}{200 \times 100 \times 200 \times 100} = 18.75 > 10.828 = \chi_{0.001}^2, \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$

依据 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验，推断 H_0 不成立，

即认为村民的性别与参与管理的意愿有关。…………… (7 分)

(3) 法一：依题意， X 的可能取值为 0, 1, 2, 3，

从该县中随机抽取一位村民，取到不愿意参与管理的男性村民的概率为 $\frac{1}{6}$ ，…………… (9 分)

$$\text{故 } P(X=0) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}, \quad P(X=1) = C_3^1 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{72},$$

$$P(X=2) = C_3^2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \frac{5}{6} = \frac{5}{72}, \quad P(X=3) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}.$$

故 X 的分布列为：…………… (13 分)

X	0	1	2	3
P	$\frac{125}{216}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{216}$

$$\text{则数学期望 } E(X) = 0 \times \frac{125}{216} + 1 \times \frac{25}{72} + 2 \times \frac{5}{72} + 3 \times \frac{1}{216} = \frac{1}{2}. \dots\dots\dots (15 \text{ 分})$$

法二：依题意，从该县中随机抽取一位村民，

取到不愿意参与管理的男性村民的概率为 $\frac{1}{6}$ ，…………… (9 分)

则 $X \sim B(3, \frac{1}{6})$, 故 $E(X) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ (15 分)

17. (满分 15 分)

【知识点】写出等比数列的通项公式、利用 a_n 与 s_n 关系求通项或项、错位相减法求和

【分析】(1) 利用 a_n 与 S_n 的关系结合等比数列的基本量法可得;

(2) 由错位相减可得.

【详解】(1) $S_n = 2a_n + n - 3$, ①

当 $n=1$ 时, $a_1 = 2a_1 + 1 - 3$, $\therefore a_1 = 2$ (2 分)

当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = 2a_{n-1} + (n-1) - 3$, ②

①-②得 $a_n = 2a_{n-1} - 1$, (4 分)

则 $a_n - 1 = 2(a_{n-1} - 1)$, 即数列 $\{a_n - 1\}$ 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列,

则 $a_n - 1 = 2^{n-1}$,

数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^{n-1} + 1, n \in N^*$ (7 分)

(2) $b_n = 2n, n \in N^*$,

$\therefore$ 数列 $\{b_n \cdot a_n\}$ 的通项公式为 $b_n \cdot a_n = n \times 2^n + 2n, n \in N^*$ (9 分)

令 $A_n = 1 \times 2 + 2 \times 2^2 + \dots + n \times 2^n$,

$2A_n = 1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + \dots + (n-1) \times 2^n + n \times 2^{n+1}$, (12 分)

则 $2A_n - A_n = A_n = -(2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n) + n \times 2^{n+1} = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$.

又 $2 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + 2n = n(n+1)$, (14 分)

$\therefore T_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2 + n(n+1), n \in N^*$ (15 分)

18. (满分 17 分)

【知识点】根据离心率求椭圆的标准方程、椭圆中向量点乘问题、根据 a 、 b 、 c 求椭圆标准方程、根据直线与椭圆的位置关系求参数或范围、椭圆中的定值问题

【分析】(1) 由椭圆顶点、离心率条件列式算出 a, c, b , 直接写出椭圆标准方程;

(2) ①设直线 $x = ty + \frac{2}{3}$, 并联立椭圆方程 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 借助韦达定理, 用向量坐标乘积为零证明两直线平行;

②写出 AC, BD 直线方程并联立求 H 横坐标, 再代入坐标算向量数量积得到定值.

【详解】(1) 由题意知 $a = 2, e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $c = \sqrt{3}$, 所以 $b^2 = a^2 - c^2 = 4 - 3 = 1$,

所以椭圆 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (2 分)

(2) ①直线 l 的斜率不为 0, 设 l 的方程为 $x = ty + \frac{2}{3}$, $C(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$.

$$\text{联立} \begin{cases} x = ty + \frac{2}{3} \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{得 } 9(t^2 + 4)y^2 + 12ty - 32 = 0, \dots\dots\dots (4 \text{ 分})$$

$$\Delta = 144t^2 + 36(t^2 + 4) \times 32 > 0, \text{ 则 } y_1 + y_2 = -\frac{4t}{3(t^2 + 4)}, y_1 y_2 = -\frac{32}{9(t^2 + 4)}, \dots\dots (5 \text{ 分})$$

由 D 在椭圆上, D' 在圆上, 易知 $D'(x_2, 2y_2)$,

$$\text{则 } \overrightarrow{AD'} = (x_2 + 2, 2y_2), \overrightarrow{BC} = (x_1 - 2, y_1), \dots\dots\dots (7 \text{ 分})$$

$$\text{因为 } x_1 = ty_1 + \frac{2}{3}, x_2 = ty_2 + \frac{2}{3},$$

$$\text{所以 } 2y_2(x_1 - 2) - y_1(x_2 + 2) = 2y_2\left(ty_1 + \frac{2}{3} - 2\right) - y_1\left(ty_2 + \frac{2}{3} + 2\right) = ty_1 y_2 - \frac{8}{3}(y_1 + y_2),$$

$$\text{代入韦达定理得 } ty_1 y_2 - \frac{8}{3}(y_1 + y_2) = t\left(-\frac{32}{9(t^2 + 4)}\right) - \frac{8}{3}\left(-\frac{4t}{3(t^2 + 4)}\right) = 0, \dots\dots\dots (9 \text{ 分})$$

$$\text{则 } \overrightarrow{AD'} // \overrightarrow{BC}, \text{ 从而 } AD' // BC. \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

$$\text{②直线 } AC \text{ 的方程为 } y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2), \text{ 直线 } BD' \text{ 的方程为 } y = \frac{2y_2}{x_2 - 2}(x - 2),$$

$$\text{则 } \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2) = \frac{2y_2}{x_2 - 2}(x - 2),$$

$$\text{所以 } \frac{x_H + 2}{x_H - 2} = \frac{2y_2(x_1 + 2)}{y_1(x_2 - 2)} = \frac{2y_2(ty_1 + \frac{2}{3} + 2)}{y_1(ty_2 + \frac{2}{3} - 2)} = \frac{2y_2(ty_1 + \frac{2}{3} + 2)}{y_1(ty_2 + \frac{2}{3} - 2)} = \frac{2ty_1 y_2 + \frac{16}{3}y_2}{ty_1 y_2 - \frac{4}{3}y_1} \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

$$\text{由①中韦达定理可知 } ty_1 y_2 = \frac{8(y_1 + y_2)}{3}, \text{ 代入可得 } \frac{2ty_1 y_2 + \frac{16}{3}y_2}{ty_1 y_2 - \frac{4}{3}y_1} = \frac{\frac{16}{3}(y_1 + y_2) + \frac{16}{3}y_2}{\frac{8}{3}(y_1 + y_2) - \frac{4}{3}y_1} = \frac{\frac{16}{3}y_1 + \frac{32}{3}y_2}{\frac{4}{3}y_1 + \frac{8}{3}y_2} = 4,$$

$$\text{即 } \frac{x_H + 2}{x_H - 2} = 4, \text{ 可解得 } x_H = \frac{10}{3}. \dots\dots\dots (15 \text{ 分})$$

$$\text{由题意, 可设 } H\left(\frac{10}{3}, m\right), \text{ 则 } \overrightarrow{OH} = \left(\frac{10}{3}, m\right), \dots\dots\dots (16 \text{ 分})$$

$$\text{又 } \overrightarrow{OE} = \left(\frac{2}{3}, 0\right), \text{ 从而 } \overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OH} = \frac{20}{9}, \text{ 所以 } \overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OH} \text{ 为定值 } \frac{20}{9}. \dots\dots\dots (17 \text{ 分})$$

19. (满分 17 分)

【知识点】求已知函数的极值、利用导数证明不等式、利用导数研究不等式恒成立问题、求在曲线上一点处的切线方程(斜率)

【分析】(1) 求出函数 $f(x)$ 的导数, $f'(x) = \ln x + \frac{x+1}{x}$, 求出为 $f'(1) = 2$, 可求切线方程,

(2) 求 $g(x)$ 的导数 $g'(x) = 1 - x + \frac{1}{e^x}$, 再讨论 $g'(x) = 0$, 有唯一实根, 进而证明有唯一极值点,

(3) 根据分析法 $b \geq F(x)_{\max}$, 结合隐零点进行化简得到最终证明结论.

【详解】

(1) 当 $a=1$ 时, $f(x)=(x+1)\ln x$, $f(1)=(1+1)\times \ln 1=0$, $f'(x)=\ln x+\frac{x+1}{x}$,
 $f'(1)=\ln 1+\frac{1+1}{1}=2$, 所以切线方程为 $y=2(x-1)$, 即 $y=2x-2$ (3 分)

(2) 已知 $g(x)=x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{e^x}$, 其定义域为 R , $g'(x)=1-x+\frac{1}{e^x}$,
 令 $p(x)=1-x+\frac{1}{e^x}$, 则 $p'(x)=-1-\frac{1}{e^x}<0$, 所以 $p(x)$ 在 R 上单调递减.
 利用零点存在定理: 则 (5 分)
 $p(0)=1-0+\frac{1}{e^0}=2>0$, $p(1)=1-1+\frac{1}{e}=\frac{1}{e}>0$, $p(2)=1-2+\frac{1}{e^2}=\frac{1}{e^2}-1<0$,
 所以存在唯一的 $x_0\in(1,2)$, 使得 $p(x_0)=0$, 即 $g'(x_0)=0$.
 当 $x<x_0$ 时, $g'(x)>0$, $g(x)$ 单调递增; 当 $x>x_0$ 时, $g'(x)<0$, $g(x)$ 单调递减.
 所以 $g(x)$ 仅有一个极值点 $x=x_0$ (8 分)

(3) 因为 $f(x)=(ax+1)\ln x$, 所以 $(ax+1)\ln x\leq ax+b$ 对任意 $x>0$ 恒成立,
 即 $b\geq (ax+1)\ln x-ax$ 对任意 $x>0$ 恒成立.
 令 $F(x)=(ax+1)\ln x-ax$, 则 $b\geq F(x)_{\max}$,
 对 $F(x)$ 求导: $F'(x)=a\ln x+\frac{ax+1}{x}-a=a\ln x+\frac{1}{x}(a<0)$, (10 分)
 由复合函数单调性知 $F'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,
 且当 $x\rightarrow 0^+$ 时, $F'(x)\rightarrow +\infty$,
 当 $x\rightarrow +\infty$ 时, $F'(x)\rightarrow -\infty$,
 所以存在唯一的 $x_1\in(0,+\infty)$, 使得 $F'(x_1)=0$, (12 分)
 即 $a\ln x_1+\frac{1}{x_1}=0$, $a\ln x_1=-\frac{1}{x_1}$, ①
 当 $0<x<x_1$ 时, $F'(x)>0$, $F(x)$ 单调递增; 当 $x>x_1$ 时, $F'(x)<0$, $F(x)$ 单调递减.
 $F_{\max}=F(x_1)=(ax_1+1)\ln x_1-ax_1$, (13 分)
 由①: $ax_1\ln x_1=-1$, 代入:
 $F(x_1)=-1+\ln x_1-ax_1$, 因此 $b\geq \ln x_1-1-ax_1$,
 要证 $b-a\geq x_0$, 只需证
 $\ln x_1-1-ax_1-a=\ln x_1-1-a(x_1+1)\geq x_0$, ②
 由①变形: $-a=\frac{1}{x_1\ln x_1}$,

$$a < 0 \Rightarrow \ln x_1 > 0 \Rightarrow x_1 > 1,$$

令 $t = \ln x_1 > 0$, $x_1 = e^t$, 代入②, 只需证明: $\varphi(t) = t - 1 + \frac{e^t + 1}{te^t} \geq x_0$, $\varphi(t) = t - 1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{te^t}$,
 $\varphi'(t) = \frac{t^2 e^t - e^t t - 1}{t^2 e^t}$,

$$\text{记 } h(t) = t^2 e^t - e^t - t - 1, t > 0,$$

$$h'(t) = (t^2 + 2t - 1)e^t - 1,$$

为研究 $h'(t)$ 的单调性, 设 $G(t) = h'(t) = (t^2 + 2t - 1)e^t - 1$,

$$\text{求导: } G'(t) = (2t + 2)e^t + (t^2 + 2t - 1)e^t = (t^2 + 4t + 1)e^t,$$

当 $t > 0$ 时, $t^2 + 4t + 1 > 0, e^t > 0$, 故 $G'(t) > 0$,

因此 $G(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格单调递增, 即 $h'(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 严格单调递增. ... (14 分)

$$h'(0) = G(0) = -2 < 0, h'(1) = G(1) = 2e - 1 > 0,$$

由零点存在定理, $\exists t^* \in (0, 1)$, 使得 $h'(t^*) = 0$,

$t \in (0, t^*), h'(t) < 0, h(t)$ 单调递减,

$t \in (t^*, +\infty), h'(t) > 0, h(t)$ 单调递增,

$$h(1) = e - 3 < 0, h(2) = 3e^2 - 3 > 0,$$

$h(t)$ 在 $(t^*, +\infty)$ 严格递增, 由零点存在定理, 存在唯一 $t_0 \in (1, 2)$, 满足 $h(t_0) = 0$,

$t \in (0, t_0), \varphi'(t) < 0, \varphi(t)$ 单调递减, $t \in (t_0, +\infty), \varphi'(t) > 0, \varphi(t)$ 单调递增,

$$\varphi(t)_{\min} = \varphi(t_0), \dots\dots\dots (15 \text{ 分})$$

由 $h(t_0) = 0$ 得 $(t_0^2 - 1)e^{t_0} = t_0 + 1$,

$t_0 \in (1, 2), t_0 + 1 \neq 0$, 等式两边约去 $t_0 + 1$, 得

$$(t_0 - 1)e^{t_0} = 1 \Rightarrow e^{t_0} = t_0 - 1, \quad \textcircled{3}$$

由 $h(t_0) = 0$ 变形: $\frac{e^{t_0} + 1}{t_0 e^{t_0}} = t_0 - e^{t_0}$,

$$\varphi(t_0) = t_0 - 1 + \frac{e^{t_0} + 1}{t_0 e^{t_0}} = t_0 - 1 + \frac{1 + \frac{1}{e^{t_0}}}{t_0} = t_0 - 1 + \frac{1 + t_0 - 1}{t_0} = t_0 - 1 + 1 = t_0,$$

即 $\varphi(t)_{\min} = t_0$, ... (16 分)

由 $g(x)$ 的极值点 x_0 , 满足导数 $g'(x_0) = 0$, 可得 $e^{x_0} = x_0 - 1$,

设 $m(s) = e^s - s + 1$, 求导得 $m'(s) = e^s - 1 > 0$, $m(s)$ 在 R 严格递增,

方程 $m(s) = 0$ 的根唯一, 故 $t_0 = x_0$,

$\varphi(t) \geq \varphi(t_0) = x_0$,

即 $\ln x_1 - 1 - a(x_1 + 1) \geq x_0$,

结合 $b \geq \ln x_1 - 1 - ax_1$, 得 $b - a \geq x_0 \dots\dots\dots (17 \text{ 分})$