

树德中学高 2024 级高三上学期 10 月阶段性测试数学试题

命题人：刘臆 审题人：张世军 李波波 唐颖君

满分：150 分 时间：120 分钟

一. 单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的，请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.

1. 已知集合 $A = \{(x, y) | y = 2\}$, $B = \{(x, y) | y = x\}$, 则 $A \cap B =$

- A. $\{2\}$ B. $\{(2, 2)\}$ C. $\{2, 0\}$ D. $\{(2, 0), (0, 2)\}$

2. 下列各式的运算结果为 $2i$ 的是

- A. $i + i^2 + i^3 + i^4$ B. $|3 - i|i$ C. $i(2 + i) - 1$ D. $\frac{1}{i} + 3i$

3. 已知直线 a 、 b 与平面 α 、 β 、 γ , 能使 $\alpha \perp \beta$ 的充分条件是

- A. $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$ B. $\alpha \cap \beta = a, b \perp a, b \subset \beta$
C. $a // \beta, a // \alpha$ D. $a // \alpha, a \perp \beta$

4. 已知一组数据为 2, 3, 4, 6, 7, 8, 若 n 为这组数据的中位数, 则 $(x - 1)^n$ 的展开式中 x^2 的系数为

- A. 6 B. 3 C. 1 D. -10

5. 设公差为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_7 = 28$, 若 a_3, a_4, a_8 成等比数列, 则 $a_8 =$

- A. 16 B. 8 C. 4 D. 2

6. 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 边上的点, $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ($x, y \in \mathbf{R}$), 则 $\frac{y + 3x}{xy}$ 的最小值为

- A. 3 B. $2 + 2\sqrt{3}$ C. $4 + 2\sqrt{3}$ D. 6

7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$, 对于正实数 a , 定义集合 $M_a = \{x | f(x + a) = f(x)\}$, 若满足 $M_a \neq \emptyset$, 则 a 的取值范围为

- A. $\left[\frac{7}{4}, 4\right)$ B. $\left(\frac{7}{4}, 14\right)$ C. $\left[\frac{7}{4}, +\infty\right)$ D. $(4, 14)$

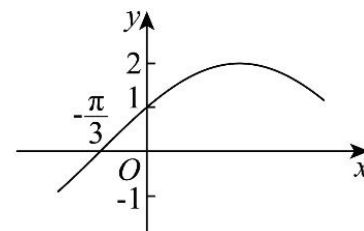
8. 函数 $f(x) = \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin 2x$ ($x \in (0, \pi)$) 有两个极值点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), 则 $\cos x_1 \cos x_2$ 的值为

- A. $\frac{1}{4}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

二. 多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对得 6 分，部分选对的得部分分，选对但不全的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 已知如图是函数 $f(x) = 2\cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$) 的部分图象, 则

- A. $\varphi = -\frac{\pi}{3}$
B. $f(x)$ 在 $(-1, 2)$ 上单调递增
C. $f(x)$ 的图象关于 $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ 中心对称
D. $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度后为偶函数



10. 某中学在 2026 年秋季运动会中, 设置了“欢乐跑”“趣味接力”“拔河比赛”“花式跳绳”四个教师项目. 甲、乙、丙 3 名教师每人至少从中选择一个活动参加, 每个活动都恰有 1 人参加, 记事件 $A_1 =$ “甲参加欢乐跑”, $A_2 =$ “甲参加花式跳绳”, $A_3 =$ “乙参加趣味接力”, 则

- A. A_1 与 A_2 对立 B. $P(A_1) = \frac{1}{3}$
C. A_1 与 A_3 相互独立 D. $P(A_3 | A_1) = \frac{5}{12}$

11. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x + 1)$ 为偶函数, 且当 $0 < x \leq 1$ 时, $f(x) = 4^x - 1$, 则

- A. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(2, 0)$ 中心对称
B. $f\left(\frac{11}{2}\right) < f\left(\frac{5}{2}\right)$
C. 函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(4k + 1, 4k + 3)$, $k \in \mathbf{Z}$
D. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 且 $a_{n+1} = f(a_n)$, 则 $a_{2026} = 3$

三. 填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 焦点在 x 轴上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ ($a > 0$) 的离心率 $e < \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 a 的取值范围是_____.

13. $\triangle ABC$ 的内角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c , 若 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $B = \frac{\pi}{6}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, 则 $b =$ _____.

14. 已知集合 $M = \{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}, n \geq 2, n \in \mathbf{N}$ 是由函数 $y = \cos x, x \in [0, 2\pi]$ 的图象上两两不相同的点构成的点集, 集合 $S = \{a \mid a = \overrightarrow{OP_0} \cdot \overrightarrow{OP_i}, i = 0, 1, 2, \dots, n, n \geq 2, n \in \mathbf{N}\}$, 其中 $P_0(0, 1), P_1(\pi, -1)$. 若集合 S 中的元素按照从小到大的顺序排列能构成公差为 d 的等差数列, 当 $d \in \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$ 时, 则符合条件的点集 M 的个数为_____.

四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (13 分) 已知函数 $f(x) = 2\sin x \cos x + 2\sqrt{3}\sin^2 x - \sqrt{3}$.

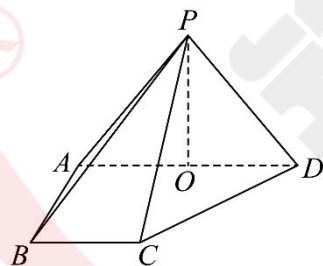
(1) 求函数 $f(x)$ 的最小正周期及其单调递增区间; (6 分)

(2) 若 A 为 $\triangle ABC$ 的内角, 且 A 为锐角, 且 $f(A) = \sqrt{3}, a = 2\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 面积的最大值. (7 分)

16. (15 分) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA = PC = PD$, 底面 $ABCD$ 是直角梯形, $AD \parallel BC$, $AB \perp AD$. 已知 $AD = 4, BC = 2, CD = 2\sqrt{2}$, 点 O 为 AD 的中点.

(1) 求证: $PO \perp$ 平面 $ABCD$; (7 分)

(2) 若二面角 $P-CD-A$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 求 PO 的长. (8 分)



17. (15 分) 2026 年 8 月“世界机器人大会”在北京闭幕. 现抽屉中备有某款机器人所需的 6 块规格相同的电池, 其中 3 块为一次性电池, 另外 3 块为可反复使用的充电电池. 每次使用时随机取一块电池, 若取出的是一次性电池, 则使用后作废品回收, 若取出的是可充电电池, 则使用后充满电再放回抽屉.

(1) 求第 2 次取出一次性电池的概率; (3 分)

(2) 在已知第 2 次取出一次性电池的条件下, 求第 1 次取出的是可充电电池的概率; (4 分)

(3) 设 X, Y 是离散型随机变量, X 在给定事件 $Y = y$ 条件下的期望定义为:

$$E(X|Y=y) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X=x_i|Y=y) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{P(X=x_i, Y=y)}{P(Y=y)}$$

其中 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 为 X 的所有可能取值的集合, $P(X=x, Y=y)$ 表示事件“ $X=x$ ”与“ $Y=y$ ”均发生的概率. 设 X 表示电动机器人前 4 次使用中取出一次性电池的块数, Y 表示前 2 次使用中取出可充电电池的块数, 求 $E(X|Y=1)$. (8 分)

18. (17 分) 已知点 $A(-1, 0), B(1, 0)$, 曲线 E 上的动点 M 满足 $k_{MA} \cdot k_{MB} = 2$,

(1) 求曲线 E 的方程; (4 分)

(2) l 是曲线 E 在点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线, 过 M 作 l 的垂线分别交 x 轴、 y 轴于点 $A(x, 0)$ 和 $B(0, y)$, 当点 M 运动时, 试求出点 $P(x, y)$ 的轨迹方程, 并指出是什么曲线; (6 分)

(3) 根据 (2) 的结果, 如果推广到一般, 你能得出怎样的相应结论? 请证明你的结论. (7 分)

19. (17 分) 已知函数 $f(x) = \cos x - kx - 1$.

(1) 若 $x \in [0, \pi]$ 讨论 $f(x)$ 的极值点个数; (4 分)

(2) 若 $k = 1$, 设函数 $F(x) = f(x) + \ln(x+1)$.

(i) 证明: $F(x) \leq 0$ 恒成立; (4 分)

(ii) 若 $g(x) = F(x) + x + 1$, 证明: $\sum_{k=n+1}^{2n} g\left(\sin \frac{1}{k} - 1\right) < \ln 2, n \in \mathbf{N}^*$. (9 分)

树德中学高 2024 级高三上学期 10 月阶段性测试数学试题参考答案

一. 选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
B	D	D	D	A	C	A	B	ABD	BD	ACD

7.提示: $\sqrt{x+a}=x+2$ 有解, 即 $a=x^2+3x+4(-2\leq x<0)$ 有解

8.提示: 数形结合: $\cos 3x=\cos 2x$ 有两个根, 由 x 取值范围知: $2x_1+3x_1=2\pi, 2x_2+3x_2=4\pi$

14.提示: 若 $d=1, S=\{-1,0,1\}$, 其中, 与-1 对应的点 1 个, 与 1 对应的点 2 个, 其中 P_0 必在, 与 0 对应的点 2 个, 满足条件的 M 有: $2\times(C_2^1+C_2^2)\times 1=6$ 个;

若 $d=\frac{1}{2}, S=\{-1,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},1\}$, 与 $-\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{2}$ 对应的点分别有 2 个, 满足条件的 M 有:

$2\times(C_2^1+C_2^2)\times(C_2^1+C_2^2)\times(C_2^1+C_2^2)\times 1=54$ 个, 共 60 个.

二. 填空题

12. $(1,\frac{\sqrt{6}}{2})$ 13. 2 14. 60

三. 解答题

15. (1) 函数 $f(x)=2\sin x\cos x+2\sqrt{3}\sin^2 x-\sqrt{3}=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$,3 分

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$,4 分

由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leq 2x-\frac{\pi}{3}\leq 2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z$,5 分,

可得 $k\pi-\frac{\pi}{12}\leq x\leq k\pi+\frac{5\pi}{12}, k\in Z$, 即有 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[k\pi-\frac{\pi}{12}, k\pi+\frac{5\pi}{12}], k\in Z$6 分

(2) $f(A)=\sqrt{3}, a=2\sqrt{3}$, 可得 $\sin(2A-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 由 $0<A<\frac{\pi}{2}$, 可得 $-\frac{\pi}{3}<2A-\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}$,

则 $2A-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$, 即 $A=\frac{\pi}{3}, B+C=\frac{2\pi}{3}$ 7 分

由正弦定理得, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin \frac{\pi}{3}}=4$,

所以 $b=4\sin B, c=4\sin C$,8 分

所以 $\triangle ABC$ 面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 16\times \frac{\sqrt{3}}{2}\times \sin B\times \sin(\frac{2\pi}{3}-B)$

$=4\sqrt{3}\sin B(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B)=3\sin 2B-\sqrt{3}\cos 2B+\sqrt{3}=2\sqrt{3}\sin(2B-\frac{\pi}{6})+\sqrt{3}$ 10 分

所以 $-\frac{\pi}{6}<2B-\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{6}$, 所以 $\sin(2B-\frac{\pi}{6})\leq 1$, 所以 $S\leq 3\sqrt{3}$.

故 $\triangle ABC$ 面积的最大值是 $3\sqrt{3}$ 13 分(几何法得出最大值, 也给分)

16.证明: (1)因为 $PA=PD$, 点 O 为 AD 的中点, 所以 $PO\perp AD$,1 分

在直角梯形 $ABCD$ 中, 连接 CO , 因为 $AD\parallel BC, AB\perp AD$.

所以 $ABCO$ 是矩形, 即: $CO\perp AD$,

在 $Rt\triangle ODC$ 中, $CD=2\sqrt{2}, OD=2$, 所以 $OC=2$2 分

在 $\triangle POC$ 和 $\triangle POD$ 中, $PC=PD, PO=PO, OC=OD$, 所以 $\triangle POC\cong \triangle POD$,

所以 $\angle POC=\angle POD=90^\circ$, 即 $PO\perp OC$,5 分

又 $OC\cap AD=O, OC, AD\subset$ 平面 $ABCD$,6 分

所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$;7 分 (未指明相交扣 1 分)

(2) 以 O 为原点, OC 为 x 轴, OD 为 y 轴, OP 为 z 轴, 建立空间直角坐标系,

设 $PO=a$, 则 $O(0,0,0), P(0,0,a), D(0,2,0), C(2,0,0)$8 分

设平面 PCD 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z), \vec{CD}=(-2,2,0), \vec{CP}=(-2,0,a)$.

由 $\begin{cases} \vec{CD}\cdot\vec{m}=-2x+2y=0 \\ \vec{CP}\cdot\vec{m}=-2x+az=0 \end{cases}$, 取 $x=a$, 得 $\vec{m}=(a,a,2)$10 分

易知平面 CAD 的一个法向量为 $\vec{n}=(0,0,1)$,11 分

设二面角 $P-CD-A$ 的大小为 θ , $|\cos \theta|=|\cos \vec{m}, \vec{n}|=\frac{2}{\sqrt{a^2+a^2+4}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,13 分

解得 $a=2$15 分

17. (1) 设事件 A_1 表示第一次取出时为可充电电池, 事件 A_2 表示第一次取出时为一次性电池, 事件 B 表示第二次取出时为一次性电池,1 分

则 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}+\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{9}{20}$,3 分

(2) 由 (1) 知: $P(A_1B)=\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$,5 分

所以 $P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{9}{20}}=\frac{5}{9}$ 7 分

(3) 由题意, X 的可能取值为 1, 2, 3,8 分

只需考虑第 3、4 次取得一次性电池的块数,

则 $P(X=1|Y=1)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$, (第 3、4 次均为充电电池)

$P(X=2|Y=1)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{27}{50}$, (第 3、4 次充电电池和一次性电池各一次)

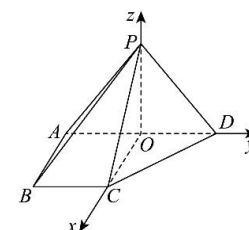
$P(X=3|Y=1)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$, (第 3、4 次均为一次性电池)13 分

所以 $E(X|Y=1)=1\times\frac{9}{25}+2\times\frac{27}{50}+3\times\frac{1}{10}=\frac{87}{50}$ 15 分

18. 解: (1) 设 $M(x,y), k_{MA}\cdot k_{MB}=\frac{y}{x+1}\cdot\frac{y}{x-1}=2$ 2 分

整理得: $x^2-\frac{y^2}{2}=1(x\neq\pm 1)$ (未挖点扣 1 分)4 分

(2) 因为排除了顶点, 所以直线 l 不可能垂直于 x 轴, 设直线 $l: y=kx+m$,



$$\text{与双曲线方程联立} \begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{2} = 1 \\ y = kx + m \end{cases}, \text{整理得} (2 - k^2)x^2 - 2kmx - m^2 - 2 = 0,$$

因为直线 l 是双曲线在点 M 处的切线即 l 与双曲线只有一个公共点 $M(x_0, y_0)$,

所以 $\Delta = 4k^2m^2 - 4(2 - k^2)(-m^2 - 2) = 8(m^2 + 2 - k^2) = 0$, 则 $m^2 = k^2 - 2$,5 分

同时由韦达定理可得 $x_0 + x_0 = \frac{2km}{2 - k^2}$, 即 $x_0 = \frac{km}{2 - k^2} = \frac{km}{-m^2} = -\frac{k}{m}$,

代入 l 方程可得 $y_0 = -\frac{k^2}{m} + m = -\frac{m^2 + 2}{m} + m = -\frac{2}{m}$, 所以 $m = -\frac{2}{y_0}, k = -mx_0 = \frac{2x_0}{y_0}$...6 分

(代半留半求出切线斜率也给分, (3) 问同)

过点 M 与直线 l 垂直的直线方程为 $y - y_0 = -\frac{y_0}{2x_0}(x - x_0)$ 即 $y = -\frac{y_0}{2x_0}x + \frac{3y_0}{2}$,7 分

当 $x = 0$ 时, 得 $y = \frac{3y_0}{2}$, 当 $y = 0$ 时, 得 $x = 3x_0$,8 分

因为 $x_0^2 - \frac{y_0^2}{2} = 1 (y_0 \neq 0)$, 所以 $\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \frac{\left(\frac{2}{3}y\right)^2}{2} = 1 (y \neq 0)$,9 分

故点 $P(x, y)$ 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{9} - \frac{2y^2}{9} = 1 (y \neq 0)$, 可知其为去掉顶点的双曲线;10 分

(3) 结论: 对于任意双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 点 $P(x, y)$ 的轨迹为去掉顶点的双曲线

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a^2 + b^2}{a}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{a^2 + b^2}{b}\right)^2} = 1 (y \neq 0) \text{12 分}$$

证明如下: 设直线 $l: y = kx + m$, 与双曲线方程联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = kx + m \end{cases}$,

整理得 $(b^2 - a^2k^2)x^2 - 2a^2kmx - a^2m^2 - a^2b^2 = 0$, l 与双曲线相切于 $M(x_0, y_0)$,

所以 $\Delta = 4a^4k^2m^2 - 4(b^2 - a^2k^2)(-a^2m^2 - a^2b^2) = 4a^2b^2(m^2 + b^2 - a^2k^2) = 0$, $m^2 = a^2k^2 - b^2$...13 分

且有 $x_0 + x_0 = \frac{2a^2km}{b^2 - a^2k^2}$, 即 $x_0 = \frac{a^2km}{b^2 - a^2k^2} = \frac{a^2km}{-m^2} = -\frac{a^2k}{m}$,

则 $y_0 = -\frac{a^2k^2}{m} + m = -\frac{m^2 + b^2}{m} + m = -\frac{b^2}{m}$, 所以 $m = -\frac{b^2}{y_0}, k = -\frac{mx_0}{a^2} = \frac{b^2x_0}{a^2y_0}$,14 分

过点 M 与直线 l 垂直的直线方程为 $y - y_0 = -\frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x - x_0)$ 即 $y = -\frac{a^2y_0}{b^2x_0}x + \frac{a^2}{b^2}y_0 + y_0$,15 分

当 $x = 0$ 时, 得 $y = \frac{a^2}{b^2}y_0 + y_0$, 当 $y = 0$ 时, 得 $x = \frac{\frac{a^2y_0}{b^2} + y_0}{\frac{a^2y_0}{b^2x_0}} = \frac{b^2}{a^2}x_0 + x_0$,16 分

因为 $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1 (y_0 \neq 0)$, 带入整理可得:

$$\text{故点 } P(x, y) \text{ 的轨迹为去掉顶点的双曲线 } \frac{x^2}{\left(\frac{a^2 + b^2}{a}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{a^2 + b^2}{b}\right)^2} = 1 (y \neq 0) \text{17 分}$$

19. 解: (1) 由题, $f'(x) = -\sin x - k, x \in [0, \pi]$ 1 分

令 $f'(x) = 0, k = -\sin x$,

当 $k \leq -1$ 或 $k \geq 0$ 时, 原函数无极值点

当 $-1 < k < 0$ 时, 原函数有两个极值点.4 分(等号取错扣 2 分)

(2) (i) 证明: 设 $h(x) = \ln(x+1) - x, x > -1$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1}$,

当 $-1 < x < 0$ 时, $h'(x) > 0$, 当 $x > 0$ 时, $h'(x) < 0$, 即函数 $h(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故 $h(x) \leq h(0) = 0$, 即 $\ln(x+1) \leq x$,6 分

又因 $\cos x - 1 \leq 0$, 故 $\ln(x+1) + \cos x \leq x + 1$, 即得 $F(x) = f(x) + \ln(x+1) \leq 0$;8 分

(ii) 证明: 由 (i) 可知 $\cos x + \ln(1+x) \leq x + 1$,

$\therefore g(x) = \cos x + \ln(1+x) \leq x + 1$,10 分

$\therefore g\left(\sin \frac{1}{k} - 1\right) \leq \sin \frac{1}{k}$,

所以 $\sum_{k=n+1}^{2n} g\left(\sin \frac{1}{k} - 1\right) = g\left(\sin \frac{1}{n+1} - 1\right) + g\left(\sin \frac{1}{n+2} - 1\right) + \cdots + g\left(\sin \frac{1}{2n} - 1\right)$

$\leq \sin \frac{1}{n+1} + \sin \frac{1}{n+2} + \cdots + \sin \frac{1}{2n}$,12 分

先证 $x > \sin x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

令 $t(x) = x - \sin x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $t'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, 故 $t(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增,

故 $t(x) > t(0) = 0$, 故 $x > \sin x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

所以 $\sin \frac{1}{n+1} + \sin \frac{1}{n+2} + \cdots + \sin \frac{1}{2n} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$,14 分

再证 $\ln x \leq x - 1$,

设 $m(x) = \ln x - x + 1$, 则当 $x > 1$ 时, $m'(x) = \frac{1}{x} - 1 < 0$, $m(x)$ 单调递减,

当 $0 < x < 1$ 时, $m'(x) > 0$, $m(x)$ 单调递增,

故 $m(x) \leq m(1) = 0$, 故 $\ln x \leq x - 1$, 当且仅当 $x = 1$ 时取等号,

故令 $x = \frac{n}{n+1}$, 则 $\ln \frac{n}{n+1} < \frac{n}{n+1} - 1$, 故 $\frac{1}{n+1} < \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$,

因此 $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n$,

故 $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} < \ln(n+1) - \ln n + \ln(n+2) - \ln(n+1) + \cdots + \ln 2n - \ln(2n-1)$

$= \ln 2n - \ln n = \ln 2$,16 分

综上所述: $\sum_{k=n+1}^{2n} g\left(\sin \frac{1}{k} - 1\right) < \ln 2, n \in \mathbf{N}^*$17 分