

南充市高 2027 届高考适应性考试（一诊）

数学参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1	2	3	4	5	6	7	8
B	A	C	D	C	A	D	B

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9	10	11
AC	ABD	ABD

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 2 13. 1 14. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 解：(1) 零假设 H_0 ：该校男生和女生在每天体育锻炼时间方面是否与性别无关联.

由 2×2 列联表得 $a = 30$ ， $b = 70$ ， $c = 50$ ， $d = 50$ ， $n = 200$ ，

代入卡方公式： $\chi^2 = \frac{200 \times (30 \times 50 - 50 \times 70)^2}{80 \times 120 \times 100 \times 100} \approx 8.333 > 6.635$ ，.....4 分

根据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验，可推断 H_0 不成立，即认为该校男生和女生在每天体育锻炼时间方面是否与性别有关.....6 分

(2) 采用分层随机抽样从“每天体育锻炼时间低于 1 h”的学生中，抽取 8 名学生进行体能测试，

抽取的男生人数为 $8 \times \frac{30}{80} = 3$ ，抽取的女生人数为 $8 \times \frac{50}{80} = 5$8 分

X 为从 8 人中抽 3 人时的男生人数，服从超几何分布，可能取值为 0, 1, 2, 3,

$P(X = 0) = \frac{C_3^0 C_5^3}{C_8^3} = \frac{5}{28}$9 分

$P(X = 1) = \frac{C_3^1 C_5^2}{C_8^3} = \frac{15}{28}$10 分

$P(X = 2) = \frac{C_3^2 C_5^1}{C_8^3} = \frac{15}{56}$11 分

$$P(X=3) = \frac{C_3^3 C_5^0}{C_8^3} = \frac{1}{56} \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

因此 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{1}{56}$

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{5}{28} + 1 \times \frac{15}{28} + 2 \times \frac{15}{56} + 3 \times \frac{1}{56} = \frac{9}{8} \dots\dots\dots 13 \text{分}$$

16.证明: (1)取 AD 中点为 O , 连接 PO, OC ,

$\because \triangle PAD$ 是边长为 4 的等边三角形,

$\therefore PO \perp AD$, $\dots\dots\dots 2 \text{分}$

又平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$,

$\therefore PO \perp$ 平面 $ABCD$, $\dots\dots\dots 3 \text{分}$

又 $BC \parallel AD$, $AO = BC = 2$,

$\therefore ABCO$ 是平行四边形, $\dots\dots\dots 4 \text{分}$

$\therefore OC \parallel AB$.

又 $AB \perp AD$,

$\therefore OC \perp AD, OC = AB = 2$, $\dots\dots\dots 5 \text{分}$

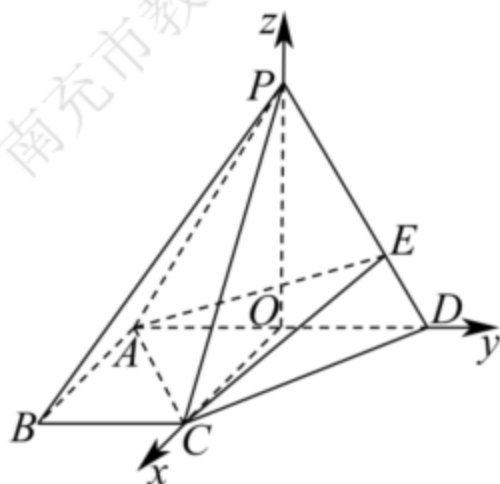
又 $OP, OC \subset$ 平面 POC 且 $OP \cap OC = O$,

$\therefore AD \perp$ 平面 POC , $\dots\dots\dots 6 \text{分}$

又 $PC \subset$ 平面 POC ,

$\therefore PC \perp AD$ $\dots\dots\dots 7 \text{分}$

(2) 由题意知以 O 为坐标原点, 直线 OC, OD, OP 分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系, 如图,



$\dots\dots\dots 8 \text{分}$

则 $A(0, -2, 0), D(0, 2, 0), C(2, 0, 0), B(2, -2, 0), P(0, 0, 2\sqrt{3})$,

则 $\overrightarrow{AP} = (0, 2, 2\sqrt{3}), \overrightarrow{PD} = (0, 2, -2\sqrt{3}), \overrightarrow{AC} = (2, 2, 0)$,9 分

已知 $\overrightarrow{PE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PD}$, 则 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PE} = (0, 2, 2\sqrt{3}) + \frac{1}{3}(0, 2, -2\sqrt{3}) = \left(0, \frac{8}{3}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$,

$\because OP \perp$ 平面 DAC

$\therefore$ 平面 DAC 的法向量为 $\overrightarrow{m} = (0, 0, 1)$ 10 分

设平面 EAC 的法向量为 $\overrightarrow{n} = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2x + 2y = 0 \\ \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AE} = \frac{8}{3}y + \frac{4\sqrt{3}}{3}z = 0 \end{cases}$,11 分

取 $y = -\sqrt{3}$, 得 $x = \sqrt{3}, z = 2$,

$\therefore \overrightarrow{n} = (\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 2)$ 13 分

$\therefore |\cos \langle \overrightarrow{m}, \overrightarrow{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{m}| \cdot |\overrightarrow{n}|} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$ 14 分

$\therefore$ 平面 EAC 与平面 DAC 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$ 15 分

17.解: (1) $\therefore \frac{c-b}{a} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin C + \sin B}$

$\therefore$ 由正弦定理得 $\frac{c-b}{a} = \frac{a+b}{c+b}$ 2 分

整理得 $c^2 - b^2 = ab + a^2$ 3 分

又由余弦定理得

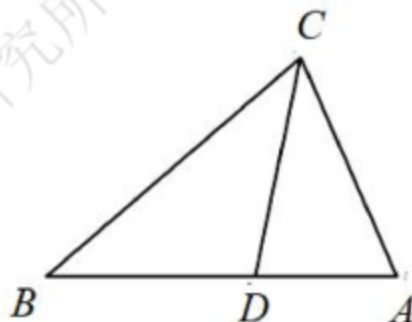
$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{-ab}{2ab} = -\frac{1}{2}$,4 分

又 $\because B \in (0, \pi)$,

$\therefore C = \frac{2\pi}{3}$ 5 分

(2) (i) $\because CD$ 为角 C 的平分线,

$\therefore \angle ACD = \angle BCD = \frac{\pi}{3}$.



$$\because S_{\triangle ABC} = S_{\triangle CBD} + S_{\triangle CAD}, \text{ 且 } CD = 1,$$

$$\therefore \frac{1}{2}ab\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}a \cdot CD\sin\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}b \cdot CD\sin\frac{\pi}{3},$$

$$\therefore a + b = ab,$$

$$\text{又} \because \text{余弦定理得 } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C,$$

$$\therefore a^2 + b^2 + ab = 12$$

$$\text{即 } (a+b)^2 - ab = 12$$

$$\text{设 } t = ab, \text{ 则 } a+b=t, \text{ 代入可得 } t^2 - t - 12 = 0.$$

$$\text{解得 } t = 4 \text{ 或 } t = -3 \text{ (舍去),}$$

$$\therefore ab = 4.$$

所以 $\triangle ABC$ 的面积为

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{(ii) 由向量的数量积的运算公式, 可得 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos A = bccosA,$$

$$\text{因为 } c = 2\sqrt{3}$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2\sqrt{3}c \cos A, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{由正弦定理 } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \text{ 可得 } b = 4\sin B$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 8\sqrt{3} \sin B \cos A, \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } A + B + C = \pi \text{ 且 } C = \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{所以 } B = \frac{\pi}{3} - A.$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= 8\sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{3} - A\right) \cos A \\ &= 4\sqrt{3} \cdot \left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin\left(2A - \frac{\pi}{3}\right) \right] \dots\dots\dots 13 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$\text{因为 } A \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \text{ 可得 } 2A - \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{所以 } \sin\left(2A - \frac{\pi}{3}\right) \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \in (0, 12) \text{ 即 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \text{ 的取值范围为 } (0, 12) \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

18.解：(1)由 $\begin{cases} b=2 \\ e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2} \\ a^2=b^2+c^2 \end{cases}$ 3 分

得 $a=4, b=2$ 4 分

所以椭圆 C 的方程为： $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 5 分

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), M(x_0, y_0)$, 则

$\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y = kx + m \end{cases}$ 6 分

$\Rightarrow (1+4k^2)x^2 + 8kmx + 4(m^2-4) = 0$ 7 分

$\Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 = -\frac{8km}{1+4k^2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{4(m^2-4)}{1+4k^2} \end{cases}$ 9 分

$\Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow 4(4k^2+1) - m^2 > 0$

$\Rightarrow S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |AB| \times d = \frac{1}{2} \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| \times \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{1}{2} \times \frac{|m|}{\sqrt{4k^2+1}} \times 4\sqrt{4(4k^2+1)-m^2}$

$\Rightarrow S_{\triangle OAB} = 2\sqrt{\frac{m^2}{4k^2+1} \left(4 - \frac{m^2}{4k^2+1}\right)} \leq 2 \times \frac{\frac{m^2}{4k^2+1} + \left(4 - \frac{m^2}{4k^2+1}\right)}{2} = 4$ 11 分

当 $\frac{m^2}{4k^2+1} = 2$ 时, $(S_{\triangle OAB})_{\max} = 4$12 分

$m^2 = 2(4k^2+1)$ ①13 分

$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{4km}{1+4k^2} = \frac{-8k}{m} \\ y_0 = \frac{y_1+y_2}{2} = kx_0 + m = \frac{2}{m} \end{cases}$ 14 分

$$\Rightarrow \begin{cases} k = \frac{-x_0}{4y_0} \\ m = \frac{2}{y_0} \end{cases} \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

代入①得 $\frac{x_0^2}{8} + \frac{y_0^2}{2} = 1 \ (y_0 \neq 0)$

所以点 M 的轨迹方程为: $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1 \ (y \neq 0) \dots\dots\dots 17 \text{ 分}$

19.解: (1)当 $m=1$ 时, 因为 $f(x) = \frac{1}{2}x \ln x - \frac{3}{2}x + 2 \ln(x+1)$

所以 $f'(x) = \frac{1}{2} \ln x - \frac{x-1}{x+1} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

因为 $f'(1)=0, f(1) = 2 \ln 2 - \frac{3}{2} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

所以函数 $f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程为: $y = 2 \ln 2 - \frac{3}{2} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2) 因为函数 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 单调递增

所以 $f'(x) = \frac{1}{2} \ln x - m \frac{x-1}{x+1} \geq 0$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上恒成立 $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

令 $f'(x) = h(x) = \frac{1}{2} \ln x - \frac{m(x-1)}{x+1}$,

则 $h'(x) = \frac{1}{2x} - \frac{2m}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2(1-2m)x + 1}{2x(x+1)^2}$, $h(1) = 0 \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

①当 $m \leq 1$ 时, $x \in (1, +\infty)$, $x^2 + 2(1-2m)x + 1 \geq x^2 - 2x + 1 > 0$.

故 $h'(x) > 0$, $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

因此 $h(x) > h(1) = 0 \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

②当 $m > 1$ 时, 令 $h'(x) = 0$, 得 $x_1 = 2m-1 - \sqrt{(2m-1)^2 - 1}$ 或 $x_2 = 2m-1 + \sqrt{(2m-1)^2 - 1}$.

由 $x_2 > 1$ 及 $x_1 x_2 = 1$ 得 $x_1 < 1$,

故当 $x \in (1, x_2)$ 时, $h'(x) < 0$,

$h(x)$ 在 $(1, x_2)$ 上单调递减,

当 $1 < x < x_2$ 时, $h(x_2) < h(x) < h(1) = 0$, 不满足题意.....9 分

综上, m 的取值范围是 $(-\infty, 1]$10 分

(3)证明: 已知函数 $f(x)$ 有 3 个极值点 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 < x_2 < x_3$,

则 $f'(x) = \frac{1}{2} \ln x - m \frac{x-1}{x+1}$ 有 3 个不同零点 x_1, x_2, x_3 , $f'(1) = 0$11 分

令 $f'(x) = h(x)$12 分

$$h'(x) = \frac{1}{2x} - \frac{2m}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2(1-2m)x + 1}{2x(x+1)^2}.$$

记 $\mu(x) = x^2 + 2(1-2m)x + 1$,

令 $(2-4m)^2 - 4 > 0$ 且 $2-4m < 0$, 所以 $m > 1$.

当 $a > 1$ 时, 记 $\mu(x) = 0$ 的两根为 x_4, x_5 , 则 $x_4 x_5 = 1$,13 分

不妨设 $0 < x_4 < 1 < x_5$,

又 $h(x)$ 在 $(0, x_4)$ 上单调递增, 在 (x_4, x_5) 上单调递减, 在 $(x_5, +\infty)$ 上单调递增, 所以

$$h(x_5) < 0 < h(x_4),$$

当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $h(x) \rightarrow -\infty$;

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$,

所以 $h(x) = f'(x)$ 存在三个不同零点 x_1, x_2, x_3 , 且 $x_1 < x_2 < x_3$;14 分

又 $h(x) = 0$ 的三个零点分别 x_1, x_2, x_3 , 因此一定有: $0 < x_1 < x_2 < x_3$, 且 $x_2 = 1$,

$$\text{同时若 } h(x) = 0, \text{ 则 } h\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{x} - m \frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1} = -\left(\frac{1}{2} \ln x - m \frac{x-1}{x+1}\right) = 0$$

$\therefore x_1 \cdot x_3 = 1$,15 分

要证: $\frac{2x_2 - x_3}{x_1} < 2m - 1$ 且 $x_3 = \frac{1}{x_1}$,

只需证: $2 - x_3 < x_1(2m - 1)$16 分

只需证： $x_1(2m-1) + x_3 > 2$

由 $\frac{1}{x_1} + (2m-1)x_1 > 2\sqrt{2m-1} > 2$

故结论成立.....17 分