锦宏教育微信公众号：jh985211　　锦宏教育客服微信：18117901643

树德中学高2024级高三上开学考试数学试题

一、单选题：本题共8小题，每小题5分，共40分.在每个小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．设$a>0,s\in R$，则下列语句是“$a^s>1$”的充分条件的是(　　)

A．$a>1,s<1$　B．$0<a<1,s<1$　C．$a>1,s>0$　D．$0<a<1,s>1$

2．已知复数$z=\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}$，则其共轭复数$\bar{z}$在复平面内对应的点位于(　　)

A．第一象限　B．第二象限　C．第三象限　D．第四象限

3．已知圆$C:x^2-4ax+y^2=0(a>0)$，若直线$l:x+y-6=0$上存在唯一点P，使得过点P作圆C的两条切线相互垂直，则$a=$(　　)

A．$\frac{1}{2}$　　B．1　　C．$\frac{3}{2}$　　D．2

4．若函数$y=\log_{\frac{1}{2}}\left(a^x-\frac{1}{4}\right)$在区间$[-1,2]$上单调递增，则$a$的取值范围是(　　)

A．$\left(0,\frac{1}{2}\right)$　　B．$\left(\frac{1}{2},1\right)$　　C．$(1,4)$　　D．$(4,+\infty)$

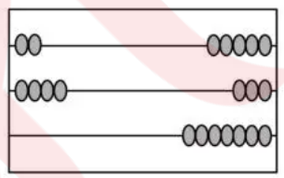
5．已知数列$\{a_n\}$(非常数列)前n项和为S_n，$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为等差数列，$n\in N^*$，$a_1=-1$，且$S_2+1$，$S_3+1$，$S_5+1$成等比数列，则$S_{10}$的值为(　　)

A．-10　　B．80　　C．81　　D．90

6．已知$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\alpha=\frac{1}{3}$，则$\cos\left(2\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)=$(　　)

A．$-\frac{7}{9}$　　B．$-\frac{1}{9}$　　C．$\frac{7}{9}$　　D．$\frac{1}{9}$

7．如图所示，玩具计数算盘的三档上各有7个算珠，现将每档算珠分为左右两部分，左侧的每个算珠表示数2，右侧的每个算珠表示数1(允许一侧无珠)，记上、中、下三档的数字和分别为a,b,c，若a,b,c成等差数列，则不同的分珠计数法共有(　　)



A．20种　B．32种　　C．54种　　D．72种

8、在三角形ABC中，点D在边BC上，满足AD平分$\angle BAC$，并且$AB=AD=2,BD=1$，则CD的长为(　　)

A．$\frac{4}{3}$　B．2　　C．$\frac{8}{3}$　　D．$\sqrt{6}$

二、多选题：本题共3小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得6分，部分选对得部分分，有选错的得0分.

9．已知函数$f(x)=2\cos(2x+\varphi)\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$满足$f(x)+f\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=0$，则(　　)

A．$f(x)$的最小正周期为π　　B．$f(x)$的图象关于直线$x=\frac{5\pi}{12}$对称

C．$f(x)$在区间$\left[\frac{3\pi}{2},\frac{11\pi}{6}\right]$上单调递减　　D．$f(x)$在区间$(0,\pi)$上有两个零点

10、已知F_1，F_2分别是双曲线$x^2-\frac{y^2}{2}=1$的左、右焦点，M是左支上一点，且在x轴上方，过F_2作$\angle F_1MF_2$角平分线的垂线，垂足为N，O是坐标原点，则(　　)

A．若$\angle MF_1F_2=\frac{\pi}{2}$，则直线$MN$的斜率为$-\sqrt{3}$　B．若$\angle MF_1F_2=\frac{\pi}{2}$，则$\overrightarrow{F_2M}\cdot\overrightarrow{F_2N}=4$

C．若$\angle MF_1F_2=\alpha$，则$|ON|=1$　　D．若$\angle MF_1F_2=\alpha$，则$|ON|=\cos\alpha$

11、已知函数$f(x)=(x^2+ax)e^x$，$f'(x)$为$f(x)$的导数，则(　)

A．任意实数a，$f(x)$一定存在极大值和极小值

B．存在实数a，使得$f(x)$在区间$(-2,-1)$上单调递增

C．任意实数a，曲线$f(x)$一定存在与直线$y=x$平行的切线

D．存在实数a，使得函数$g(x)=f'(x)+e^{-1}$有唯一零点

三、填空题：本题共3个小题，每小题5分，共15分.

12．已知向量$\vec{a}=(3,1)$，$\vec{b}=(1,2)$，$\vec{c}=k\vec{a}-\vec{b}$，若$\vec{b}\parallel\vec{c}$，则$k=$_____.

13．在棱长均为2的正三棱锥$P-ABC$中，点M是AC的中点，点N是侧面PBC上的一个动点，当$MN\parallel$平面PAB时，动点N的轨迹的长度是____

14．甲、乙、丙三人玩“剪刀、石头、布”的游戏．游戏规则为：剪刀赢布，布赢石头，石头赢剪刀．每一局游戏甲、乙、丙同时出“剪刀、石头、布”中的一种手势，且相互独立．在一局游戏中某人赢1个人得2分，赢2个人得5分，其他情况得0分．设一局游戏后3人总得分为ξ，则随机变量ξ的数学期望$E(\xi)$的值为_____.

锦宏教育微信公众号：jh985211　　锦宏教育客服微信：18117901643

四、解答题：本题共5小题，共77分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15．为科学评估施肥对某品种农作物发育情况和产量的影响，某研学小组对劳动实践基地中随机抽取的200株该品种农作物进行了观察，并进行数据分析.

(1) 将所抽取的农作物按是否施肥分为两类，并将其分为“发育正常”和“发育不正常”两类，整理得到下表：

	施肥	不施肥	合计
发育正常	70	30	
发育不正常	40		
合计			200

请补全以上表格，根据小概率值$\alpha=0.001$的独立性检验，能否认为“是否施肥”与“该品种农作物发育正常”有关，并说明理由.

(2) 对施肥的农作物进行观察，发现施肥超过某标准量后，产量反而会迅速下降. 从施肥的该品种农作物中随机抽取10株，记录它们的过量施肥量$x(g)$与产量$y(g)$，数据如下表：

农作物编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
过量施肥量$x(g)$	0	0.5	1	1	1.5	2	2	2	2.5	2.5
产量$y(g)$	100	85	85	85	80	75	75	70	70	75

经计算，$\sum_{i=1}^{10}x_i=15$，$\sum_{i=1}^{10}y_i=800$，$\sum_{i=1}^{10}x_i^2=29$，$\sum_{i=1}^{10}x_iy_i=1135$，求$y$关于$x$的线性回归方程.

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

α	0.050	0.010	0.001
x_α	3.841	6.635	10.828

对于一组数据(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，……，(x_n,y_n)，其回归直线$\hat{y}=\hat{a}+\hat{b}x$的斜率和截距的最小二乘估计分别为：

$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$.

16．在$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，且满足$a\cos B=2a-b\cos A$.

(1) 求证：$c=2a$；

(2) 若$\angle ABC=\dfrac{2\pi}{3}$，$BD$平分$\angle ABC$且交$AC$于点$D$，且$BD=2\sqrt{2}$，求$\triangle ABC$的周长.

17、已知抛物线C：$y^2=2px(p>0)$，过点$Q(1,0)$作斜率为p的直线与抛物线相交于A,B两点。

（1）若$|AB|=\dfrac{3}{2}\sqrt{p^2+1}$，求抛物线C的方程；

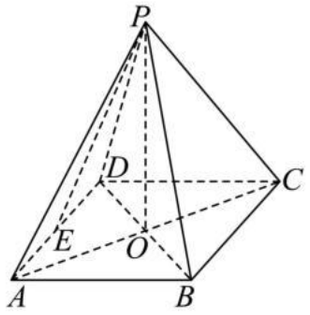
（2）求$\dfrac{1}{|AQ|}+\dfrac{1}{|BQ|}$的最大值。

18．已知点P是边长为2的菱形$ABCD$所在平面外一点，且点P在底面$ABCD$上的射影是AC与BD的交点O，已知$\angle BAD=60°$，$\triangle PDB$是等边三角形.

(1) 求证：平面$PBD\perp$平面$ABCD$

(2) 求点D到平面PBC的距离；

(3) 若点E是线段AD上的动点(包括端点)，设直线PE与平面PBC所成的角为θ，求$\sin\theta$的取值范围.



19．设函数$f(x)=e^x+a\sin x$.

(1) 当$a=-2$时，讨论$f(x)$在$(-\pi,\pi)$上的极值点情况.

(2) 当$a=-1$时，$f(x)\geqslant bx+1$在$[0,+\infty)$上恒成立，求b的取值范围.

(3) 若$a>0$，$f(x)$在$[0,+\infty)$上存在零点，求a的取值范围.

锦宏教育微信公众号：jh985211　　锦宏教育客服微信：18117901643

树德中学高2024级高三上开学考试数学试题参考答案

一、单选题

【答案】*CABB　BCBA*

二、多选题

【答案】*ABD　　ABC　　AD*

三、填空题

12．0　13．1　14．$\frac{13}{3}$

四、解答题

15．【答案】【详解】(1) 补全 2 * 2 列联表如下：

	施肥	不施肥	合计
发育正常	70	30	100
发育不正常	40	60	100
合计	110	90	200

所以 $\chi^2=\frac{200\times(70\times60-30\times40)^2}{110\times90\times100\times100}=\frac{200}{11}\approx18.182>10.828$

所以有 99．9% 的把握认为“是否施肥”与“该品种农作物是否发育正常”有关．

(2) 已知，$\bar{x}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i=1.5$，$\bar{y}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}y_i=80$，

所以，$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{10}x_iy_i-10\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{10}x_i^2-10\bar{x}^2}=\frac{1135-15\times80}{29-10\times1.5^2}=-10$，则 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=80-(-10)\times1.5=95$，

所以 y 关于 x 的线性回归方程是 $\hat{y}=95-10x$．

16．【详解】(1) 因为 $a\cos B=2a-b\cos A$，由正弦定理得 $\sin A\cos B=2\sin A-\sin B\cos A$，即 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=2\sin A$，得 $\sin(A+B)=2\sin A$，所以 $\sin C=2\sin A$，即 $c=2a$．

(2) 因为 $c=2a$，$\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$，所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin\angle ABC=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$，又因为 BD 平分 $\angle ABC$ 且交 AC 于点 D，所以 $\angle ABD=\angle CBD=\frac{\pi}{3}$，又 $BD=2\sqrt{2}$，所以 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}=\frac{1}{2}\cdot c\cdot BD\cdot\sin\angle ABD+\frac{1}{2}\cdot a\cdot BD\cdot\sin\angle CBD=\frac{3\sqrt{6}}{2}a$，所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2=\frac{3\sqrt{6}}{2}a$，即 $a=3\sqrt{2}$，$c=2a=6\sqrt{2}$，因为 $\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$，根据余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\angle ABC=126$，故 $b=3\sqrt{14}$，所以周长 $a+b+c=9\sqrt{2}+3\sqrt{14}$．

17、答案：由题意 设直线 AB 方程为：$y=p(x-1)$，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

联立 $\begin{cases}y^2=2px\\y=p(x-1)\end{cases}$　消去 x 可得 $y^2-2y-2p=0$，韦达定理 $y_1+y_2=2,y_1y_2=-2p$

(1) 由题意得 $|AB|=\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}\cdot\sqrt{4+8p}=\frac{3}{2}\sqrt{p^2+1}$，化简得 $9p^2-32p-16=0$．

解得 $p=4$ 或 $p=-\frac{4}{9}$（舍），故抛物线方程为 $y^2=8x$

(2) $\frac{1}{|AQ|}+\frac{1}{|BQ|}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}|y_1|}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}|y_2|}=\sqrt{\frac{p^2}{1+p^2}}\cdot\frac{|y_1|+|y_2|}{|y_1|\cdot|y_2|}=\sqrt{\frac{p^2}{1+p^2}}\cdot\frac{|y_1-y_2|}{|y_1|\cdot|y_2|}=\sqrt{\frac{p^2}{1+p^2}}\cdot\frac{\sqrt{4+8p}}{2p}=\sqrt{\frac{1+2p}{1+p^2}}$，令 $u=2p+1$（$u>1$），故 $\frac{1}{|AQ|}+\frac{1}{|BQ|}=2\sqrt{\frac{u}{4+(u-1)^2}}=2\sqrt{\frac{1}{u-2+\frac{5}{u}}}$

故 当 $u=\sqrt{5}$，$\frac{1}{|AQ|}+\frac{1}{|BQ|}$ 取得最大值 $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$．

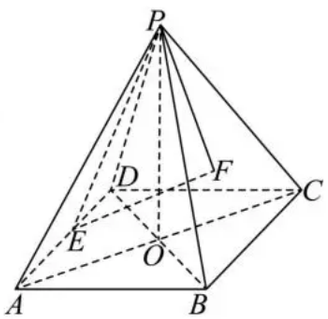
18．【详解】(1) ∵点 P 在底面 $ABCD$ 上的射影是 AC 与 BD 的交点 O，

∴$PO\perp$ 平面 $ABCD$，∵$AC\subset$ 平面 $ABCD$，∴$PO\perp AC$，∵四边形 $ABCD$ 为菱形，∴$BD\perp AC$，∵$PO\cap BD=O$，$PO,BD\subset$ 平面 PBD，∴$AC\perp$ 平面 PBD，∵$AC\subset$ 平面 $ABCD$，∴平面 $PBD\perp$ 平面 $ABCD$

(2) 由题意可得 $\triangle ABD$、$\triangle BCD$ 与 $\triangle PBD$ 都是边长为 2 的等边三角形，

∴$PO=AO=CO=\sqrt{3}$，$S_{\triangle BDC}=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$，∴$PC=\sqrt{PO^2+CO^2}=\sqrt{6}$，∵$BP=BD=BC=2$，

∴$S_{\triangle PBC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{2^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{2}$，设点 D 到平面 PBC 的距离为 h，由 $V_{D-PBC}=V_{P-BDC}$ 得 $\frac{1}{3}S_{\triangle PBC}\cdot h=\frac{1}{3}S_{\triangle BDC}\cdot OP$，即 $\frac{\sqrt{15}}{2}h=\sqrt{3}\times\sqrt{3}$，解得 $h=\frac{2\sqrt{15}}{5}$，故点 D 到平面 PBC 的距离为 $\frac{2\sqrt{15}}{5}$．



(3) 设直线 PE 与平面 PBC 所成的角为 θ，∵$AD\parallel BC$，$BC\subset$ 平面 PBC，$AD\not\subset$ 平面 PBC，∴$AD\parallel$ 平面 PBC，∴E 到平面 PBC 的距离即为 D 到平面 PBC 的距离 h．

过 E 作垂线 $EF\perp$ 平面 PBC 交于点 F，则 $\theta=\angle EPF$，

此时 $\sin\theta=\frac{EF}{PE}=\frac{2\sqrt{15}}{5PE}$，∵由 (2) 易知 $PA=PC=\sqrt{6}$，$PD=AD=2$，

∴$S_{\triangle PAD}=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{2^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{2}$，则 $\triangle PAD$ 的边 AD 上的高为 $\frac{\sqrt{15}}{2}$，∴$\frac{\sqrt{15}}{2}\leqslant PE\leqslant\sqrt{6}$，而 $\sin\theta=\frac{2\sqrt{15}}{5PE}$，∴$\frac{\sqrt{10}}{5}\leqslant\sin\theta\leqslant\frac{4}{5}$，$\sin\theta$ 的取值范围为 $\left[\frac{\sqrt{10}}{5},\frac{4}{5}\right]$．

19．设函数 $f(x)=e^x+a\sin x$．

(1) 当 $a=-2$ 时，讨论 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上的极值点情况．

(2) 当 $a=-1$ 时，$f(x)\geqslant bx+1$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，求 b 的取值范围．

(3) 若 $a>0$，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上存在零点，求 a 的取值范围.

【详解】(1) 当 $a=-2$ 时，$f(x)=e^x-2\sin x$，则 $f'(x)=e^x-2\cos x$，

①当 $x\in(0,\pi)$ 时，由指数函数 $y=e^x$ 在 $x\in(0,\pi)$ 上单调递增，余弦函数 $y=\cos x$ 在 $x\in(0,\pi)$ 上单调递减，

可知 $f'(x)=e^x-2\cos x$ 在 $(0,\pi)$ 单调递增，

又 $f'(0)=1-2=-1$，$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}>0$，所以存在 $x_1\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $f'(x_1)=0$，

当 $x\in(0,x_1)$ 时，$f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减，

当 $x\in(x_1,\pi)$ 时，$f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在 (x_1,π) 上单调递增；

②当 $x\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$ 时，由 $e^x>0$，$-2\cos x>0$，则 $f'(x)=e^x-2\cos x>0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增，

③当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 时，设 $g(x)=f'(x)=e^x-2\cos x$，则 $g'(x)=e^x+2\sin x$

由指数函数 $y=e^x$ 在 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 上单调递增，正弦函数 $y=\sin x$ 在 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 上单调递减，所以 $g'(x)=e^x+2\sin x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 单调递增，又 $g'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}}-2<0$，$g'(0)=1>0$，所以存在 $m\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ 使得 $g'(m)=0$，当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},m\right)$ 时，$g'(x)<0$，则 $g(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},m\right)$ 上单调递减，当 $x\in(m,0)$ 时，$g'(x)>0$，则 $g(x)$ 在 $(m,0)$ 上单调递增，

又 $g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=e^{-\frac{\pi}{2}}>0$，$g(0)=1-2=-1<0$，$g\left(-\frac{\pi}{3}\right)=e^{-\frac{\pi}{3}}-2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=e^{-\frac{\pi}{3}}-1<0$，所以必存在 $x_2\in\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right)$，使得 $g(x_2)=f'(x_2)=0$，

当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},x_2\right)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},x_2\right)$ 上单调递增，

当 $x\in(x_2,0)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $(x_2,0)$ 上单调递减，

综上所述，当 $x\in(-\pi,x_2)$，$f(x)$ 单调递增，当 $x\in(x_2,x_1)$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x\in(x_1,\pi)$，$f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)$ 在区间 $(-\pi,\pi)$ 内存在一个极小值点和一个极大值点.

(2) 当 $a=-1$ 时，$f(x)=e^x-\sin x$，由 $f(x)\geqslant bx+1$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，

可得 $e^x-bx-\sin x-1\geqslant 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，

令 $h(x)=e^x-bx-\sin x-1$，则 $h'(x)=e^x-b-\cos x$，

若 $b\leqslant 0$ 时，则 $h'(x)\geqslant 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，则 $h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(x)\geqslant h(0)=0$，符合题意；

若 $b>0$ 时，令 $m(x)=e^x-b-\cos x$，则 $m'(x)=e^x+\sin x\geqslant 0$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $m(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$m(0)=-b<0$，当 $x\to+\infty$ 时，$m(x)\to+\infty$，

则 $\exists\, x_0\in(0,+\infty)$，使得 $m(x_0)=0$，

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)<0$，则 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，则 $h(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(x_0)<h(0)=0$，不合题意；

综上所述，实数 b 的取值范围是 $(-\infty,0]$.

(3) 由 $f(x)=e^x+a\sin x$，$x\in[0,+\infty)$，令 $f(x)=0$，得 $-\frac{1}{a}=\frac{\sin x}{e^x}$，

设 $\varphi(x)=\frac{\sin x}{e^x}$，$x\geqslant 0$，则 $\varphi'(x)=\frac{\cos x-\sin x}{e^x}=\frac{-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{e^x}$，

令 $\varphi'(x)=0$，解得 $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$，$k\in N$，

当 $x\in\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right)$ 时，$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0$，

所以 $\varphi(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right)$ 上单调递减，

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，$\left(\frac{5\pi}{4}+2k\pi,\frac{9\pi}{4}+2k\pi\right)$ 时，$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)<0$，

所以 $\varphi(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，$\left(\frac{5\pi}{4}+2k\pi,\frac{9\pi}{4}+2k\pi\right)$ 上单调递增，

当 $x=\frac{5\pi}{4}+2k\pi$，$k\in N$ 时，$\varphi(x)$ 取得极小值，

即当 $x=\frac{5\pi}{4}$，$\frac{13\pi}{4}$，$\frac{21\pi}{4}$，$\cdots$ 时，$\varphi(x)$ 取得极小值，

又 $\sin\frac{5\pi}{4}=\sin\frac{13\pi}{4}=\sin\frac{21\pi}{4}=\cdots=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$0<e^{\frac{5\pi}{4}}<e^{\frac{13\pi}{4}}<e^{\frac{21\pi}{4}}<\cdots$，

所以 $\varphi\left(\frac{5\pi}{4}\right)<\varphi\left(\frac{13\pi}{4}\right)<\varphi\left(\frac{21\pi}{4}\right)<\cdots$，即 $\varphi(x)\geqslant\varphi\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5\pi}{4}}$，

当 $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$，$k\in N$ 时，$\varphi(x)$ 取得极大值，

即当 $x=\frac{\pi}{4}$，$\frac{9\pi}{4}$，$\frac{17\pi}{4}$，$\cdots$ 时，$\varphi(x)$ 取得极大值，

又 $\sin\frac{\pi}{4}=\sin\frac{9\pi}{4}=\sin\frac{17\pi}{4}=\cdots=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$0<e^{\frac{\pi}{4}}<e^{\frac{9\pi}{4}}<e^{\frac{17\pi}{4}}<\cdots$，

所以 $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)>\varphi\left(\frac{9\pi}{4}\right)>\varphi\left(\frac{17\pi}{4}\right)>\cdots$，即 $\varphi(x)\leqslant\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$

即当 $x\geqslant 0$ 时，$\varphi(x)\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5\pi}{4}},\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\right]$，

所以 $-\frac{1}{a}\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5\pi}{4}},\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\right]$，又 $a>0$，

即 $a\geqslant\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}}$ 时，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上存在零点，

故实数 $a\in\left[\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}},+\infty\right)$.