2026 年普通高等学校招生全国统一考试
（新高考 II 卷 · 数学）

一、单项选择题 本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

1.（5 分） $(1-3\mathrm{i})^2=$

A. $-8+6\mathrm{i}$　B. $-8-6\mathrm{i}$　C. $8+6\mathrm{i}$　D. $8-6\mathrm{i}$

【答案】B

直接按完全平方展开，注意 $\mathrm{i}^2=-1$：

$$(1-3\mathrm{i})^2=1-6\mathrm{i}+9\mathrm{i}^2=1-6\mathrm{i}-9=-8-6\mathrm{i}.$$

方法二： 视作两复数相乘 $(1-3\mathrm{i})(1-3\mathrm{i})$，实部 $1\cdot1+(-3)(-3)\mathrm{i}^2=1-9=-8$，虚部 $1\cdot(-3)+(-3)\cdot1=-6$，得 $-8-6\mathrm{i}$。

评价： 送分题，唯一陷阱是 $\mathrm{i}^2=-1$ 的符号。若漏掉负号会误得 $8-6\mathrm{i}$（选项 D），命题人正是用 C、D 设了这一类"忘记 i^2"的干扰项。

2.（5 分） 若 $A=\{0,1,3,6,9\}$，$B=\{x\mid\sqrt{x}=x\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{0,1\}$　B. $\{3,6\}$　C. $\{0,1,9\}$　D. $\{0,3,9\}$

【答案】A

由 $\sqrt{x}=x$ 先得定义域 $x\geq0$；两边平方得 $x=x^2$，即 $x(x-1)=0$，故 $x=0$ 或 $x=1$。因平方为非同解变形，须回代检验，$x=0,1$ 均满足原式，所以 $B=\{0,1\}$。从而

$$A\cap B=\{0,1\}.$$

评价： 集合与方程的结合。$\sqrt{x}=x$ 的本质是"非负数等于其算术平方根"，只有 0 与 1 满足。易错点：一是漏掉定义域 $x\geq0$，二是平方后产生增根需检验。注意 $9\notin B$（因 $\sqrt{9}=3\neq9$），排除 C、D。

3.（5 分） 若 $|\vec{a}+\vec{b}|=1$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$

A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{1}{3}$　C. $-\frac{1}{3}$　D. $-\frac{1}{2}$

【答案】D

方法一： （极化恒等式）利用 $|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2=4\,\vec{a}\cdot\vec{b}$:

$$4\,\vec{a}\cdot\vec{b}=1-3=-2\implies\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}.$$

方法二：（直接展开）由 $|\vec{a}+\vec{b}|^2=1$、$|\vec{a}-\vec{b}|^2=3$ 得

$$\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=1,\qquad \vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=3,$$

两式相减即 $4\,\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$，故 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}$。

评价：向量数量积的“平方差”技巧。两个模长平方相减恰好消去 $\vec{a}^2,\vec{b}^2$，只留 $4\vec{a}\cdot\vec{b}$，是处理“已知两组模长求点积”的标准套路，无需求出 $|\vec{a}|,|\vec{b}|$ 本身。

4.（5 分）　双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 过点 $(1,0)$ 和 $\left(\frac{\sqrt{7}}{2},-3\right)$，则 C 的渐近线方程为

A. $y=\pm3\sqrt{2}\,x$　　B. $y=\pm2\sqrt{3}\,x$　　C. $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}x$　　D. $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{6}x$

【答案】 B

点 $(1,0)$ 是双曲线的右顶点，代入得 $\frac{1}{a^2}=1$，即 $a^2=1$。再代入 $\left(\frac{\sqrt{7}}{2},-3\right)$：

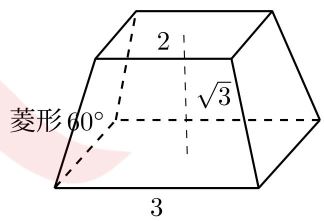
$$\frac{7/4}{1}-\frac{9}{b^2}=1\implies\frac{9}{b^2}=\frac{3}{4}\implies b^2=12.$$

故渐近线 $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\sqrt{12}\,x=\pm2\sqrt{3}\,x$。

评价：抓住 $(1,0)$ 是顶点这一“免计算”特征，一步定 $a^2=1$，是本题最省力的入口；再用第二点定 b^2。渐近线斜率为 $\frac{b}{a}$（焦点在 x 轴），切勿写成 $\frac{a}{b}$。

5.（5 分）　棱台上、下底面均为有一个内角 60° 的菱形，上、下底面边长分别为 $2,3$，棱台高为 $\sqrt{3}$，体积为

A. $\frac{19}{12}$　　B. $\frac{19}{6}$　　C. $\frac{19}{4}$　　D. $\frac{19}{2}$



【答案】 D

内角 60°、边长 s 的菱形面积为 $s^2\sin60^\circ$，故上、下底面积

$$S_1=2^2\sin60^\circ=2\sqrt{3},\qquad S_2=3^2\sin60^\circ=\frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

由台体体积公式 $V=\frac{h}{3}(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})$，其中 $\sqrt{S_1S_2}=\sqrt{2\sqrt{3}\cdot\frac{9\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$，于是

$$V=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(2\sqrt{3}+\frac{9\sqrt{3}}{2}+3\sqrt{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{19\sqrt{3}}{2}=\frac{19}{2}.$$

评价：两个考点叠加——菱形面积 $s^2\sin\theta$ 与棱台（拟柱体）体积公式。关键中间项 $\sqrt{S_1S_2}$ 不能漏；本题数据特意凑出 $\sqrt{S_1S_2}=3\sqrt{3}$ 使三项之和为整齐的 $\frac{19\sqrt{3}}{2}$。

6.（5 分）　甲、乙、丙、丁等 8 人分为 2 组，每组 4 人，甲、乙必须在一组，丙、丁不能在一组，排法有几种

A. 10　B. 12　C. 16　D. 24

【答案】C

“排法”表明两组有区别。**先定甲、乙所在组**：在两个有别的组中二选一，2 种。该组还差 2 人，而丙、丁须分开，故二人中恰有一人与甲乙同组：从丙、丁中选 1 人入此组，2 种；再从其余 4 人中选 1 人补满该组，4 种；剩下的人自动归位。共

$$2\times2\times4=16\ (\text{种}).$$

方法二：（按余下人选位）甲乙组除甲乙外还需 2 人，丙丁必占其一。若丙入甲乙组：再从其余 4 人选 1 人，4 种；若丁入甲乙组：同理 4 种。再乘“甲乙在哪一组”的 2 种，$2\times(4+4)=16$。

评价：“分组”与“分配”要分清。本题因甲、乙锁定一组、两组有别，应按“先定组、再补人”计数。常见错误是把两组当无区别（少乘 2 得 8），或忽略“丙丁分开”这一限制。

7.（5 分）　若 α 为第二象限角，且 $3\sin2\alpha\cos\alpha=8\sin\alpha\cos2\alpha$，则 $\dfrac{1+\sin\alpha}{2-\cos\alpha}=$

A. $\dfrac{3}{4}$　B. $\dfrac{3}{5}$　C. $\dfrac{1}{2}$　D. $\dfrac{5}{12}$

【答案】C

方法一：（标准化简）α 为第二象限角，$\sin\alpha\neq0$。代入 $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$、$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ 并约去 $\sin\alpha$：

$$6\sin\alpha\cos^2\alpha=8\sin\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\implies\cos^2\alpha=4\sin^2\alpha.$$

结合 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 得 $\sin^2\alpha=\dfrac{1}{5}$。第二象限取 $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt5}$，$\cos\alpha=-\dfrac{2}{\sqrt5}$，于是

$$\frac{1+\sin\alpha}{2-\cos\alpha}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt5}}{2+\frac{2}{\sqrt5}}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt5}}{2\left(1+\frac{1}{\sqrt5}\right)}=\frac{1}{2}.$$

方法二：（结构观察，免求值）由 $\cos^2\alpha=4\sin^2\alpha$ 即 $\cos\alpha=-2\sin\alpha$（第二象限取负），代入分母

$$2-\cos\alpha=2+2\sin\alpha=2(1+\sin\alpha),$$

分子分母同含因子 $1+\sin\alpha$，立得 $\dfrac{1+\sin\alpha}{2(1+\sin\alpha)}=\dfrac{1}{2}$，全程不必算出 $\sin\alpha$ 的具体值。

评价：方法二是“看出结构再约分”的范例。把条件化为 $\cos\alpha=-2\sin\alpha$ 后，分母恰好分解出 $1+\sin\alpha$，比方法一硬算更快更稳。象限决定符号是必须交代的一环。

8.（5 分）　若 $f(x)$ 为偶函数，且 $f(x)+f(x-2)=0$，且当 $x\in\left[\dfrac{3}{2},3\right]$ 时 $f(x)=x^2+ax+b$，则

A. $a=-2,b=-3$　B. $a=-2,b=3$　C. $a=-4,b=-3$　D. $a=-4,b=3$

【答案】D

方法一：（恒等式法）由 $f(x)+f(x-2)=0$ 得 $f(x+2)=-f(x)$，故 $f(x+4)=f(x)$，周期为 4。又 f 偶，结合周期得 $f(4-x)=f(x-4)=f(x)$，即图象关于直线 $x=2$ 对称。当 $x\in\left[\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2}\right]$ 时 x 与 $4-x$ 同在 $\left[\dfrac{3}{2},3\right]$ 内，故

$$(4-x)^2+a(4-x)+b=x^2+ax+b\text{ 恒成立 }\implies (a+4)(2-x)=0\implies a=-4.$$

求 b：取 $x=1$，由 $f(1)+f(-1)=0$ 与偶性 $f(-1)=f(1)$ 得 $f(1)=0$；再由 $f(3)+f(1)=0$ 得 $f(3)=0$，即 $9+3a+b=0$，代入 $a=-4$ 得 $b=3$。

方法二：（对称轴秒杀）"偶函数 + 反周期 $f(x+2)=-f(x)$"蕴含图象关于 $x=2$ 对称，故二次式 $g(x)=x^2+ax+b$ 的对称轴恰为 $x=2$，即 $-\dfrac{a}{2}=2\Rightarrow a=-4$。再由 $f(1)=0$（偶性给 $f(-1)=f(1)$，代 $x=1$）推出 $f(3)=0$，于是 $9+3a+b=0\Rightarrow b=3$。两步定 a,b，几乎不展开。

方法三：（两点直接代入）由 $f(x)+f(x-2)=0$ 取 $x=3$ 得 $f(3)+f(1)=0$；取 $x=1$ 得 $f(1)+f(-1)=0$，偶性 $f(-1)=f(1)$，故 $f(1)=0$，$f(3)=0$。又 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)+f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$、$f\left(\dfrac{5}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，且偶性 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，得 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=f\left(\dfrac{5}{2}\right)$，即 $\dfrac{9}{4}+\dfrac{3a}{2}+b=\dfrac{25}{4}+\dfrac{5a}{2}+b$，解出 $a=-4$；再由 $f(3)=0$ 得 $b=3$。

【背景深挖】（多重对称生成周期，及傅里叶视角）

对称→周期的一般定理。若 f 关于 $x=p$ 与 $x=q$ $(p\neq q)$ 两条直线对称，则 f 以 $2|p-q|$ 为周期。本题"偶"给出关于 $x=0$ 对称，而由 $f(x+2)=-f(x)$ 可推出关于 $x=2$ 对称（取 $x=-t$：$f(2-t)=-f(-t)=-f(t)$，又 $f(2+t)=-f(t)$，故 $f(2+t)=f(2-t)$）。两轴相距 2，于是周期 $2\times2=4$，与"反周期蕴含周期 4"完全吻合。这是"两对称轴生成周期"的具体实例。

反周期 ⇒ 只含奇次谐波。把周期 4 的偶函数展成傅里叶级数 $f(x)=\sum_{n\geq0}a_n\cos\dfrac{n\pi x}{2}$。条件 $f(x+2)=-f(x)$ 要求

$$\cos\frac{n\pi(x+2)}{2}=(-1)^n\cos\frac{n\pi x}{2},$$

故只有 n 为奇数时项才允许存在。也就是说，"偶 + 反周期"从频谱上强制只保留 $\cos\dfrac{\pi x}{2},\cos\dfrac{3\pi x}{2},\dots$ 这些奇次谐波——本题给的二次式只是它在一段上的"局部代表"，而 $x=2$ 是所有奇次余弦的公共对称轴，这正是"对称轴必为 $x=2$"的更深层原因。

评价：抽象函数三件套"奇偶性、周期性、对称性"的综合。方法二的"对称轴一眼定 a"是考场首选；方法三完全不依赖"图象对称"这一步，靠取特殊点列方程，更稳健也更易讲清。三法殊途同归，建议以方法二讲思想、方法三作保险。

二、多项选择题　本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。全部选对得 6 分，部分选对得部分分，有选错得 0 分。

9.（6 分）　已知 $\odot O$：$x^2+y^2=1$，$\odot A$：$x^2+y^2-6x-8y+k=0$，则

A. 圆心 A 坐标为 $(-3,-4)$　　B. $k=9$ 时，$\odot A$ 与 x 轴相切

C. $k=-11$ 时，$\odot A$ 与 $\odot O$ 相切　D. 若 $\odot O$ 与 $\odot A$ 相交，两交点所在直线方程为 $6x+8y-k-2=0$

【答案】BC

配方得 $\odot A$：$(x-3)^2+(y-4)^2=25-k$，圆心 $A(3,4)$，半径 $r=\sqrt{25-k}$。

A：圆心应为 $(3,4)$，故 A 错。

B：$k=9$ 时 $r=\sqrt{16}=4$，圆心到 x 轴距离为 $|4|=4=r$，相切，B 对。

C：$k=-11$ 时 $r=\sqrt{36}=6$，$OA=\sqrt{3^2+4^2}=5$，而 $r-1=5=OA$（大圆半径 − 小圆半径 = 圆心距），两圆内切，C 对。

D：两圆相交时，两圆方程相减得公共弦所在直线

$$(x^2+y^2-1)-(x^2+y^2-6x-8y+k)=0 \implies 6x+8y-k-1=0,$$

与选项的 $-k-2$ 不符，D 错。

评价：圆的"配方—判定—相减"三连。C 选项考"内切"：判定圆位置须比较圆心距与 $|R\pm r|$，本题 $OA=5=R-r$ 故内切，切勿只看 $R+r$。D 是公共弦经典结论"两圆方程相减"，常数项最易算错，注意是 $-(k)-(-1)$。

10.（6 分）　等比数列 $\{a_n\}$ 公比 $q\neq 1$，$a_1>0$，$2a_3=a_1+a_2$，记前 n 项和为 S_n，则

A. $q=-\frac{1}{2}$　　B. $S_n>\frac{2}{3}a_1$

C. $2S_{n+2}=S_{n+1}+S_n$　　D. $\sum_{k=1}^{n}S_k>\frac{2n}{3}a_1$

【答案】 ACD

由 $2a_1q^2=a_1+a_1q$ 且 $a_1>0$ 得 $2q^2-q-1=0$，即 $(2q+1)(q-1)=0$，又 $q\neq 1$，故 $q=-\frac{1}{2}$，**A 对**。

于是 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{2}{3}a_1\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$。

B：取 $n=2$，$S_2=a_1+a_2=a_1-\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2}a_1<\frac{2}{3}a_1$，**B 错**。

C：$2S_{n+2}-S_{n+1}-S_n=a_{n+1}+2a_{n+2}=a_{n+1}(1+2q)=a_{n+1}\cdot 0=0$，**C 对**。

D：记 $T_n=\sum_{k=1}^{n}S_k=\frac{2}{3}a_1\left(n-\sum_{k=1}^{n}q^k\right)$。而

$$\sum_{k=1}^{n}q^k=\frac{q(1-q^n)}{1-q}=-\frac{1}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]<0,$$

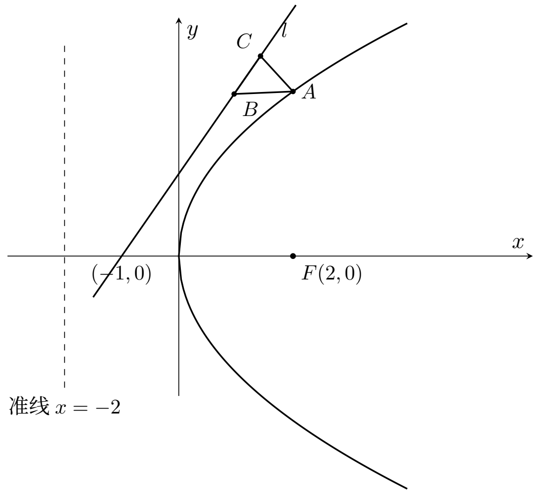
故 $T_n>\frac{2}{3}a_1\cdot n=\frac{2n}{3}a_1$，**D 对**。

评价：等比数列性质的多选综合。A 用基本量方程；C 的本质是 $a_{n+1}(1+2q)=0$（因 $q=-\frac{1}{2}$ 使 $1+2q=0$）——这是"相邻三和成等差"的伪装。B、D 都归结到对 $1-(-\frac{1}{2})^n$ 的符号估计，奇偶讨论是关键。

11.（6 分）　E：$y^2=8x$，斜率为 $k\ (k>0)$ 的直线 l 过点 $(-1,0)$，$\triangle ABC$ 为等边三角形，A 在 $y^2=8x$ 上，B,C 在 l 上。

A. 抛物线准线方程为 $x=-2$　　B. l 与 $y^2=8x$ 无交点时 $k>\sqrt{2}$

C. l 与 E 相交于唯一点 B，则抛物线焦点在直线 AB 上　　D. $k=2$ 时，$\triangle ABC$ 面积最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{15}$



【答案】ABD

A：$y^2=8x=4px$ 中 $p=2$，准线 $x=-2$，**对**。
B：$l: y=k(x+1)$，代入得 $k^2x^2+(2k^2-8)x+k^2=0$，

$$\Delta=(2k^2-8)^2-4k^4=32(2-k^2),$$

无交点 $\Leftrightarrow k^2>2\Leftrightarrow k>\sqrt{2}$，**对**。
C：$\Delta=0$ 时 $k=\sqrt{2}$，切点 $B(1,2\sqrt{2})$，焦点 $F(2,0)$，BF 斜率 $=-2\sqrt{2}$。等边三角形要求 AB 与底边 l 成 $60°$，而 BF 与 l 的夹角满足

$$\tan\theta=\left|\frac{-2\sqrt{2}-\sqrt{2}}{1+(-2\sqrt{2})\sqrt{2}}\right|=\sqrt{2}\neq\sqrt{3}=\tan 60°,$$

故焦点不在 AB 上，**错**。
D：$k=2$ 时 $l: 2x-y+2=0$。等边三角形以 BC（在 l 上）为底，面积只由顶点 A 到 l 的距离 d 决定：$S=\dfrac{d^2}{\sqrt{3}}$。设 $A\left(\dfrac{t^2}{8},t\right)$，

$$d=\frac{\left|\dfrac{t^2}{4}-t+2\right|}{\sqrt{5}}=\frac{\frac{1}{4}(t-2)^2+1}{\sqrt{5}}\geq\frac{1}{\sqrt{5}},$$

故 $S_{\min}=\dfrac{(1/\sqrt{5})^2}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{5\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{15}$，**对**。

【背景深挖】（切线参数化、反射性质与等边三角形“距离决定面积”）

抛物线切线的参数化。对 $y^2=8x$ 取点参 $P(u)=(2u^2,4u)$，由 $yy'=4$ 得 $y'=\dfrac{1}{u}$，切线为 $uy=x+2u^2$。令其过 $(-1,0)$：$0=-1+2u^2\Rightarrow u=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，临界斜率 $k=\dfrac{1}{u}=\sqrt{2}$，斜率更大即与抛物线无交点——这给了 B 的“一眼”理由，且唯一切点仍是 $B(1,2\sqrt{2})$。

C 错的本质：反射（光学）性质。抛物线在 B 处的切线 l 与“焦半径 BF”、“过 B 平行于轴的直线”成等角（反射定律）。要让 F 落在 AB 上，须 $\angle(BF,l)=60°$；但由切点几何 $\tan\angle(BF,l)=\sqrt{2}\neq\sqrt{3}$，矛盾。所以这不是“算出来不行”，而是抛物线的反射角与 $60°$ 先天错位。

D 的本质：到定直线的最短距离 = 平行切线处（包络思想）。底 BC 在定直线 l 上时，等边三角形面积 $S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{2d}{\sqrt{3}}\right)^2=\dfrac{d^2}{\sqrt{3}}$ 只看顶点 A 到 l 的距离。A 在抛物线上到 l 最近，发生在“与 l 平行的

抛物线切线”处：由 $y' = \dfrac{4}{y} = 2$ 得 $A\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$，$d = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$，故 $S_{\min} = \dfrac{\sqrt{3}}{15}$。这是“曲线到直线最短距离 $\Leftrightarrow$ 平行切线”的标准强基技巧。

评价：抛物线压轴多选，四个选项分别考准线、相切判别、反射性质、最值，难度递进。C 是“陷阱选项”，靠夹角 $\sqrt{2} \neq \sqrt{3}$ 否定；D 把“等边三角形面积”转化为“点到线距离”，再用“平行切线取最近”，是本题最漂亮的一步，务必掌握。

三、填空题　本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12.（5 分）　等差数列 $a_1 = -1$，$a_4 = 5$，则 $S_6 =$ ________。

【答案】24

方法一：（基本量）由 $a_4 = a_1 + 3d$ 得 $5 = -1 + 3d$，$d = 2$。故 $a_6 = a_1 + 5d = 9$，

$$S_6 = -1 + 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 24.$$

方法二：（求和公式）$S_6 = \dfrac{6(a_1 + a_6)}{2} = 3\,(-1+9) = 24$；或 $S_6 = 6a_1 + \dfrac{6 \cdot 5}{2}d = -6 + 15 \times 2 = 24$。

评价：等差数列基础。两条信息恰好定 a_1, d，再用求和公式即可，属保分题。

13.（5 分）　函数 $f(x) = 2^x + 2^{2-x} - m$ 有两个零点，则 m 的取值范围为 ________。

【答案】$(4, +\infty)$

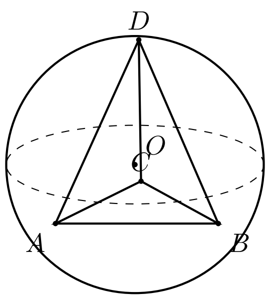
有两个零点 $\Leftrightarrow$ 方程 $2^x + 2^{2-x} = m$ 有两个不同实根。

方法一：（均值不等式 + 对称性）由 $2^x + 2^{2-x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{2-x}} = 2\sqrt{2^2} = 4$，当且仅当 $2^x = 2^{2-x}$ 即 $x = 1$ 取等。记 $g(x) = 2^x + 2^{2-x}$，则 $g(2-x) = g(x)$，图象关于直线 $x = 1$ 对称，且 $x \to \pm\infty$ 时 $g \to +\infty$，在 $x = 1$ 处取唯一最小值 4。故 $g(x) = m$ 有两个不同实根 $\Leftrightarrow m > 4$，即 $m \in (4, +\infty)$。

方法二：（换元对勾函数）令 $t = 2^x > 0$，则 $2^{2-x} = \dfrac{4}{t}$，方程化为 $m = t + \dfrac{4}{t}$。因 $t = 2^x$ 与 x 一一对应，故两零点 $\Leftrightarrow$ 该式有两个正根。$t > 0$ 时 $t + \dfrac{4}{t} \geq 4$（$t = 2$ 取等），对勾函数在 $t = 2$ 两侧各取一值，故 $m > 4$ 时恰有两个正根。所以 $m \in (4, +\infty)$。

评价：指数和型“两零点”的标准模型——$2^x + 2^{2-x}$ 关于 $x = 1$ 对称、在 $x = 1$ 取极小 4，只有高于极小值的水平线才与图象交于两点，故 $m > 4$。**易错点**：一是 $2\sqrt{2^x 2^{2-x}} = 2\sqrt{4} = 4$，勿误算；二是端点取严格“$>$”（$m = 4$ 时只有一根 $x = 1$）。

14.（5 分）　球 O 体积为 $4\sqrt{3}\,\pi$，A, B, C, D 四点均在球面上，$\triangle ABC$ 为等边三角形，$DA = DB = DC = \sqrt{2}$，且球心 O 在三棱锥 D-ABC 外部，则 $\triangle ABC$ 面积为 ________。



【答案】$\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$

设球半径 R，由 $\dfrac{4}{3}\pi R^3=4\sqrt{3}\pi$ 得 $R^3=3\sqrt{3}\Rightarrow R=\sqrt{3}$。

方法一：（轴线坐标法）因 $OA=OB=OC=R$ 且 $DA=DB=DC$，O、D 都在过 $\triangle ABC$ 外心 H 且垂直于平面 ABC 的轴线上。设外接圆半径为 r，以 H 为原点、平面 ABC 为 xy 平面、轴为 z 轴，记 $O(0,0,p)$、$D(0,0,q)$，则 $|HA|=r$，且

$$OA^2=r^2+p^2=R^2=3,\qquad DA^2=r^2+q^2=2,$$

相减得 $p^2-q^2=1$。又 O 为球心、D 在球面，$OD=|p-q|=R=\sqrt{3}$。不妨设 $p-q=\sqrt{3}$，由 $(p-q)(p+q)=1$ 得 $p+q=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，解出 $p=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $q=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$（即 O、D 分居平面 ABC 两侧，球心在三棱锥外，与题设相符）。于是

$$r^2=2-q^2=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3},\qquad a=\sqrt{3}\,r\Rightarrow a^2=3r^2=5,$$

故 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 5=\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$。

方法二：（两球截面圆公式）A,B,C 同在"以 O 为心、半径 $R=\sqrt{3}$"与"以 D 为心、半径 $\rho=DA=\sqrt{2}$"的两球面上，其公共圆即 $\triangle ABC$ 的外接圆。设该圆所在平面到 D 的距离为 x，由截面圆公式（$OD=\sqrt{3}$）

$$x=\frac{OD^2+\rho^2-R^2}{2\,OD}=\frac{3+2-3}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}},\qquad r^2=\rho^2-x^2=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3},$$

故 $S=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}r^2=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{5}{3}=\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$。

【背景深挖】（球幂 / 两球截面圆公式，含同源变式）

统一公式。设两球心 O,D 距离 d，半径分别为 R,ρ。它们的交圆（公共圆）所在平面到 D 的距离 x 与交圆半径 r 满足

$$x=\frac{d^2+\rho^2-R^2}{2d},\qquad r^2=\rho^2-x^2.$$

这正是"球幂 / 根面（radical plane）"的代数结果：两球方程相减得到的根面与连心线垂直，上式即根面位置。

本题代入（$d=OD=\sqrt{3},\ \rho=DA=\sqrt{2},\ R=\sqrt{3}$）：$x=\dfrac{3+2-3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$r^2=2-\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{3}$，故 $S=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}r^2=\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$。

同源变式（强基常考）。若改为 $DA=DB=DC=\sqrt{3}$（恰与 R 相等），则 $\rho=\sqrt{3}$，$x=\dfrac{3+3-3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$r^2=3-\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{4}$，$S=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{9}{4}=\dfrac{27\sqrt{3}}{16}$（此时两球半径相等，交圆心恰为 OD 中点）。可见"截面圆公式"把一族外接球问题统一成一套代入，避免每次重新建系。

评价：外接球的"轴线共线"是题眼：$DA=DB=DC$ 与 $OA=OB=OC$ 共同把 O,D,H 钉在同一条垂直于平面 ABC 的轴线上。本题两球半径不等（$R=\sqrt{3},\ DA=\sqrt{2}$），故 O、D 分居平面两侧，用轴线上两个勾股关系联立即可；高阶用两球截面圆公式 $x=\dfrac{OD^2+\rho^2-R^2}{2\,OD}$ 可一键处理 DA 取任意值的同类题。

四、解答题　本大题共 5 小题，共 77 分。解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（13 分） 某工厂抽取一批电子元件检测，记录首次出现故障的时间（天），得频率分布直方图（组距 10），各组 $\frac{\text{频率}}{\text{组距}}$ 依次为

$$0.005,\ 0.010,\ 0.020,\ 0.025,\ 0.015,\ 0.015,\ 0.010 \quad (\text{区间 } 345\text{–}415).$$

（1）求第一四分位数和中位数；　（2）记 $\hat{p}$ 为首次故障时间小于 365 的概率估计值。

（i）求 $\hat{p}$；　（ii）工厂售出 100 件，X 为其中首次故障小于 365 天的件数，$X \sim B(100, \hat{p})$，求 $E(X), D(X)$。

(1) 各组频率 $= \frac{\text{频率}}{\text{组距}} \times 10$，依次为

$$0.05,\ 0.10,\ 0.20,\ 0.25,\ 0.15,\ 0.15,\ 0.10,$$

累积频率依次为 $0.05,\ 0.15,\ 0.35,\ 0.60,\ 0.75,\ 0.90,\ 1$。

0.25 落在 $[365, 375)$（累积由 0.15 到 0.35）：

$$Q_1 = 365 + \frac{0.25 - 0.15}{0.020} = 365 + 5 = 370.$$

0.50 落在 $[375, 385)$（累积由 0.35 到 0.60）：

$$M = 375 + \frac{0.50 - 0.35}{0.025} = 375 + 6 = 381.$$

所以第一四分位数为 370，中位数为 381。

(2)(i) 首次故障时间小于 365 对应前两组：$\hat{p} = 0.05 + 0.10 = 0.15$。

(ii) 由 $X \sim B(100, 0.15)$：

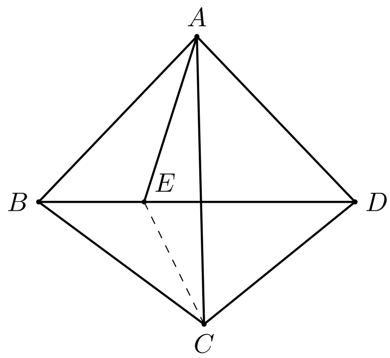
$$E(X) = 100 \times 0.15 = 15, \qquad D(X) = 100 \times 0.15 \times 0.85 = 12.75.$$

评价： 统计基本功。分位数用“线性插值”：先定所在区间，再按 下端 $+ \frac{\text{目标累频} - \text{前累频}}{\text{本组频率/组距}}$ 计算。二项分布直接套 $E = np,\ D = np(1-p)$。全程只需细心，不要把“频率/组距”当成“频率”。

16.（15 分） 如图，三棱锥 $A\text{-}BCD$ 中，$E \in BD$，$AE \perp BC$，$AE \perp CE$，$CD \perp AD$。

（1）求证：$CD \perp AB$；

（2）若 $DE = 2,\ BE = 1,\ AE = \sqrt{2},\ CD = 2\sqrt{3}$，求 AD 与平面 ABC 所成角的正弦值。



(1) 因 $BC, CE \subset$ 平面 BCD 且 $BC \cap CE = C$，又 $AE \perp BC$，$AE \perp CE$，故 $AE \perp$ 平面 BCD，从而 $AE \perp CD$。又 $CD \perp AD$，而 $AE, AD \subset$ 平面 ADE 且 $AE \cap AD = A$，所以 $CD \perp$ 平面 ADE。因 $E \in BD$，B 也在平面 ADE 内，于是 $AB \subset$ 平面 ADE，故 $CD \perp AB$。

(2) 由 (1) 知 $AE \perp$ 平面 BCD，故 $AE \perp DE$，$AE \perp CE$。于是

$$AD = \sqrt{AE^2 + DE^2} = \sqrt{6}, \quad AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = 3\sqrt{2}, \quad CE = \sqrt{AC^2 - AE^2} = 4.$$

又 $CE^2 = DE^2 + CD^2$（$16 = 4 + 12$），故 $DE \perp CD$。

方法一：（向量法）以 E 为原点，ED 所在直线为 x 轴、过 D 平行于 CD 的方向为 y 轴、EA 为 z 轴建系，则

$$E(0,0,0),\ D(2,0,0),\ B(-1,0,0),\ A(0,0,\sqrt{2}),\ C(2,2\sqrt{3},0).$$

$\overrightarrow{AB} = (-1,0,-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AC} = (2,2\sqrt{3},-\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AD} = (2,0,-\sqrt{2})$。设平面 ABC 法向量 $\vec{n} = (x,y,z)$，由 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$，$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ 取

$$\vec{n} = (2\sqrt{6},\ -3\sqrt{2},\ -2\sqrt{3}).$$

则 $\overrightarrow{AD} \cdot \vec{n} = 2 \cdot 2\sqrt{6} + 0 + (-\sqrt{2})(-2\sqrt{3}) = 4\sqrt{6} + 2\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$，$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{6}$，$|\vec{n}| = 3\sqrt{6}$，故

$$\sin\varphi = \frac{|\overrightarrow{AD} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{AD}|\,|\vec{n}|} = \frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

方法二：（等体积求点面距，避开法向量）由 (1) $AE \perp$ 平面 BCD，$AE = \sqrt{2}$；底面 $\triangle BCD$ 中 $BD = BE + ED = 3$，$CD \perp BD$，$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$，故

$$V_{A\text{-}BCD} = \frac{1}{3} S_{\triangle BCD} \cdot AE = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}.$$

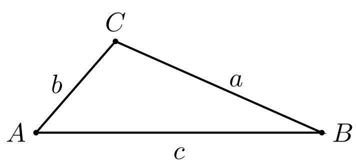
又 $AB = \sqrt{AE^2 + BE^2} = \sqrt{3}$，$AC = 3\sqrt{2}$，且 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1)(2) + 0 + (-\sqrt{2})(-\sqrt{2}) = 0$，即 $AB \perp AC$，$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{3\sqrt{6}}{2}$。设 D 到平面 ABC 的距离为 h，由 $V_{D\text{-}ABC} = V_{A\text{-}BCD}$：

$$h = \frac{3V}{S_{\triangle ABC}} = \frac{3\sqrt{6}}{3\sqrt{6}/2} = 2, \qquad \sin\varphi = \frac{h}{AD} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

评价：立体几何“线面垂直—线线垂直”转化的范本。(1) 两次“线⊥面 ⇒ 线⊥线”，注意 B 因 $E \in BD$ 而落入平面 ADE 这一细节。(2) 给两条路：向量法稳，等体积法快（先证 $AB \perp AC$ 直接得 $S_{\triangle ABC}$，再用体积桥求 h），考场可按习惯择一。

17.（15 分）　$\triangle ABC$ 中，$\cos B = \frac{3}{4}$，$\cos^2(A+C) + \sin A \sin C = 1$。

（1）求证 $\triangle ABC$ 为钝角三角形；　（2）若 $\triangle ABC$ 面积为 $\frac{\sqrt{7}}{4}$，求 $\triangle ABC$ 周长。



(1) 因 $A+C=\pi-B$，故 $\cos(A+C)=-\cos B=-\frac{3}{4}$，$\cos^2(A+C)=\frac{9}{16}$，由条件得 $\sin A\sin C=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}$。又 $\cos(A+C)=\cos A\cos C-\sin A\sin C=-\frac{3}{4}$，所以

$$\cos A\cos C=-\frac{3}{4}+\frac{7}{16}=-\frac{5}{16}<0.$$

故 $\cos A,\cos C$ 异号，即 A,C 中恰有一个为钝角，$\triangle ABC$ 为钝角三角形。

(2) $\sin B=\sqrt{1-\frac{9}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$。由 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{7}}{4}$ 得 $ac=2$。

方法一：（正弦定理求 b）由 (1) $\sin A\sin C=\frac{7}{16}$，设外接圆半径 R，则 $ac=4R^2\sin A\sin C=\frac{7R^2}{4}=2$，故 $R^2=\frac{8}{7}$，

$$b=2R\sin B=2\sqrt{\frac{8}{7}}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}=\sqrt{2}.$$

由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ 得 $a^2+c^2=b^2+2ac\cos B=2+3=5$，故 $(a+c)^2=5+4=9$，$a+c=3$。周长 $a+b+c=3+\sqrt{2}$。

方法二：（“$ac=b^2$”结构法）由 (1) $\sin A\sin C=\frac{7}{16}=\sin^2 B$，正弦定理立得 $ac=b^2$。代入余弦定理 $b^2=a^2+c^2-\frac{3}{2}ac$ 并用 $b^2=ac$:

$$ac=a^2+c^2-\frac{3}{2}ac\implies 2a^2-5ac+2c^2=0\implies(2a-c)(a-2c)=0,$$

即 $c=2a$ 或 $a=2c$。再由 $S=\frac{\sqrt{7}}{4}$ 得 $ac=2$，故 $b^2=ac=2$, $b=\sqrt{2}$；配合 $a=2c$（或 $c=2a$）解得 $\{a,c\}=\{1,2\}$，$a+c=3$，周长 $3+\sqrt{2}$。

评价：解三角形综合。(1) 把条件化为 $\cos A\cos C<0$ 判钝角，是“符号定钝角”的巧法。(2) 方法二最精彩——发现 $\sin A\sin C=\sin^2 B$ 即 $ac=b^2$，把三边关系一举锁死，比方法一算 R 更直接，体现“先观察结构再动笔”的功力。

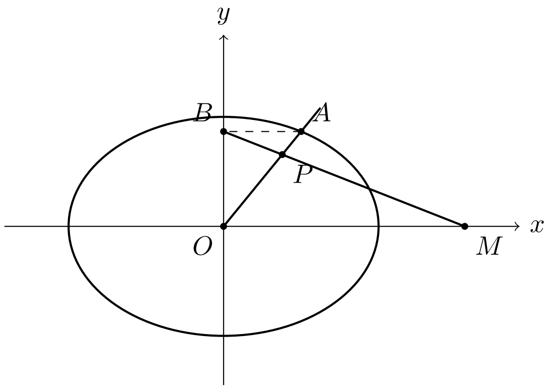
18.（17 分） 已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1\ (a>1)$，过椭圆焦点作垂直于 x 轴的直线，截椭圆所得弦长为 $\sqrt{2}$。

（1）求椭圆 E 的离心率；

（2）设点 $A(x_0,y_0)$ 在 E 上且 $y_0\neq 0$，过 A 作 y 轴的垂线，垂足为 B；点 $M(t,0)\ (t>0)$，连接 BM、AO 交于点 P，P 的轨迹记为 $\mathcal{M}$。

（i）求轨迹 $\mathcal{M}$ 的方程；

（ii）当 t 取何值时，轨迹 $\mathcal{M}$ 存在对称中心？将该曲线平移得 $\mathcal{M}'$ 使原点 O 为 $\mathcal{M}'$ 的对称中心，判断 $\mathcal{M}'$ 是什么曲线。



(1) 求离心率。

方法一： （通径公式）此椭圆 $b=1$。过焦点垂直于 x 轴的弦即通径，长 $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2}{a}=\sqrt{2}$，得 $a=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{a^2-1}=1$，故 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

方法二： （直接代入焦点横坐标）设半焦距 c，$c^2=a^2-1$。把 $x=c$ 代入 $\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$ 得 $y^2=1-\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{a^2-c^2}{a^2}=\dfrac{1}{a^2}$，弦长 $2|y|=\dfrac{2}{a}=\sqrt{2}$，故 $a=\sqrt{2}$，$c=1$，$e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

(2)(i) 求轨迹方程。由 (1) $E:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$，$B(0,y_0)$。

方法一： （比例参数消元）直线 BM 的截距式为 $\dfrac{x}{t}+\dfrac{y}{y_0}=1$；$P$ 在 AO 上记 $\lambda=\dfrac{x}{x_0}=\dfrac{y}{y_0}$，代入截距式得 $\lambda=1-\dfrac{x}{t}$，于是 $x_0=\dfrac{x}{\lambda}$，$y_0=\dfrac{y}{\lambda}$。将 A 代入 $\dfrac{x_0^2}{2}+y_0^2=1$，即 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=\lambda^2$，得

$$\frac{x^2}{2}+y^2=\left(1-\frac{x}{t}\right)^2 \qquad (y\neq 0).$$

方法二： （联立两线反解 x_0,y_0）$P(x,y)$ 在 BM 上：$\dfrac{x}{t}+\dfrac{y}{y_0}=1\Rightarrow y_0=\dfrac{ty}{t-x}$；$P,O,A$ 共线：$\dfrac{x_0}{x}=\dfrac{y_0}{y}\Rightarrow x_0=\dfrac{tx}{t-x}$。代入 $\dfrac{x_0^2}{2}+y_0^2=1$ 得 $\dfrac{t^2}{(t-x)^2}\left(\dfrac{x^2}{2}+y^2\right)=1$，即 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=\left(1-\dfrac{x}{t}\right)^2$ $(y\neq 0)$，与方法一一致。

(2)(ii) 判断曲线类型。（配方判型）展开得 $\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{t^2}\right)x^2+y^2+\dfrac{2x}{t}-1=0$。

当 $t=\sqrt{2}$ 时 x^2 系数为 0，方程化为 $y^2+\sqrt{2}x-1=0$，为**抛物线**，无对称中心。

当 $t\neq\sqrt{2}$ 时，曲线有对称中心 $C\left(\dfrac{2t}{2-t^2},0\right)$。令 $X=x-\dfrac{2t}{2-t^2}$，$Y=y$，平移后 $\mathcal{M}'$ 满足

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{t^2}\right)X^2+Y^2=\frac{t^2}{t^2-2}.$$

若 $0<t<\sqrt{2}$，则 $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{t^2}<0$ 且右端 <0，整理为 $\dfrac{(2-t^2)^2}{2t^4}X^2-\dfrac{2-t^2}{t^2}Y^2=1$，$\mathcal{M}'$ 为**双曲线**；若 $t>\sqrt{2}$，两项系数与右端同号，整理为 $\dfrac{(t^2-2)^2}{2t^4}X^2+\dfrac{t^2-2}{t^2}Y^2=1$，$\mathcal{M}'$ 为**椭圆**。

综上：$e=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；$\mathcal{M}:\dfrac{x^2}{2}+y^2=\left(1-\dfrac{x}{t}\right)^2$ $(y\neq 0)$；$t\neq\sqrt{2}$ 时有对称中心，$0<t<\sqrt{2}$ 平移得双曲线，$t>\sqrt{2}$ 平移得椭圆。

【背景深挖】（圆锥曲线“焦点—准线”统一定义，一眼定型）

把 $\mathcal{M}$ 写成 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=\left(1-\dfrac{x}{t}\right)^2$，令 $X=\dfrac{x}{\sqrt{2}}, Y=y$，则

$$X^2+Y^2=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{t}X\right)^2=\frac{2}{t^2}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}-X\right)^2.$$

左端是动点到原点距离的平方 $|OP|^2$；右端是该点到定直线 $X=\dfrac{t}{\sqrt{2}}$ 距离平方的 $\dfrac{2}{t^2}$ 倍。于是

$$\frac{|OP|}{\mathrm{dist}(P,\ \ell)}=\frac{\sqrt{2}}{|t|}=:e,$$

这正是“以原点为焦点、$X=\dfrac{t}{\sqrt{2}}$ 为准线、离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{|t|}$”的圆锥曲线**统一定义**！故

$|t|=\sqrt{2}\Rightarrow e=1$，抛物线，无中心；　$0<t<\sqrt{2}\Rightarrow e>1$，双曲线；　$t>\sqrt{2}\Rightarrow e<1$，椭圆。

平移不改变曲线形状，故 $\mathcal{M}'$ 的类型与 $\mathcal{M}$ 完全一致。一个离心率 $e=\dfrac{\sqrt{2}}{|t|}$ 就把分类讲透——这是大学解析几何里“二次曲线由离心率统一刻画”的中学落地，远比硬配方一眼看清结构。

评价：轨迹与曲线分类的压轴。(i) 用比例参数 λ 把“两线交点”一步消元，避免联立解方程组；(ii) 高中通法靠配方判系数符号，但**背景深挖**里的“焦点—准线统一定义”才是命题立意所在：方程右端天然是“到定直线距离的平方”，离心率 $\dfrac{\sqrt{2}}{|t|}$ 与 1 的大小直接决定抛物线/双曲线/椭圆。

19.（17 分）　已知函数 $f(x)=xe^x+ax+b$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=-2x+1$。

（1）求 a,b;

（2）当 $x>0$ 时，$f(x+m)-f(x)>m$ 对 $\forall x>0$ 恒成立，求 m 的取值范围;

（3）当 $x>0$ 时，$f(x+k)+f(k-x)>2f(k)$ 对 $\forall x>0$ 恒成立，求 k 的最小值。

(1) 求 a,b。

方法一：（切线两要素）$f'(x)=(x+1)e^x+a$，故 $f(0)=b$，$f'(0)=1+a$。切线 $y=-2x+1$ 给出切点纵坐标 $f(0)=1$、斜率 $f'(0)=-2$，于是 $b=1$，$1+a=-2$，即 $a=-3$。从而 $f(x)=xe^x-3x+1$。

方法二：（点在切线上 + 斜率相等）切点 $(0,f(0))$ 在切线上，得 $f(0)=-2\cdot 0+1=1$，即 $b=1$；曲线在该点与切线相切，斜率相等 $f'(0)=-2$，即 $1+a=-2$，$a=-3$。同得 $f(x)=xe^x-3x+1$。

(2) 求 m 的取值范围。（以下 $f(x)=xe^x-3x+1$）

方法一：（差函数单调性，全程只用导数）将不等式改写为 $f(x+m)-(x+m)>f(x)-x$。令 $g(x)=f(x)-x=xe^x-4x+1$，则原条件 $\Leftrightarrow g(x+m)>g(x)$ 对 $\forall x>0$ 成立。$g'(x)=(x+1)e^x-4$，$g''(x)=(x+2)e^x>0$，故 g' 在 $(0,+\infty)$ 严格递增。

先排除 $m\le 0$：$m=0$ 为等号不合；$m<0$ 取 x 充分大，$g'>0$ 使 g 递增而 $x+m<x$，得 $g(x+m)<g(x)$ 不合。故 $m>0$。设 $\varphi(x)=g(x+m)-g(x)$，则 $\varphi'(x)=g'(x+m)-g'(x)>0$，$\varphi$ 严格递增，对 $x>0$ 有

$$\varphi(x)>\varphi(0)=g(m)-g(0)=m(e^m-4).$$

若 $m(\mathrm{e}^m-4)\ge 0$ 则 $\varphi(x)>0$ 恒成立；若 <0 则 $x\to 0^+$ 时 $\varphi(x)<0$ 不合。故 $m(\mathrm{e}^m-4)\ge 0$，又 $m>0$，得 $\mathrm{e}^m\ge 4$，即 $m\ge \ln 4$。所以 $m\in[\ln 4,+\infty)$。

方法二：（端点效应定必要 + 单调性验充分）记 $F(x)=f(x+m)-f(x)-m$，要 $F(x)>0\,(\forall x>0)$。令 $x\to 0^+$，由连续性必有 $F(0)\ge 0$，即 $f(m)-f(0)\ge m$，亦即 $m\mathrm{e}^m-3m\ge m$，得 $m(\mathrm{e}^m-4)\ge 0$；又 $m>0$，故 $m\ge\ln 4$（必要）。反之 $m\ge\ln 4$ 时由方法一 φ 递增且 $\varphi(0)\ge 0$ 知 $\varphi(x)>0$（充分）。综上 $m\ge\ln 4$。

方法三：（构造单变量函数直接求导）令 $h(x)=f(x+m)-f(x)-m$（$m\le 0$ 同前不合，设 $m>0$）。$h'(x)=f'(x+m)-f'(x)=(x+m+1)\mathrm{e}^{x+m}-(x+1)\mathrm{e}^x$。由 $f'(t)=(t+1)\mathrm{e}^t-3$ 的导 $f''(t)=(t+2)\mathrm{e}^t>0$ 知 f' 递增，故 $h'(x)>0$，h 在 $(0,+\infty)$ 递增，$h(x)>\lim_{x\to 0^+}h(x)=f(m)-f(0)-m=m(\mathrm{e}^m-4)$。要恒正须 $m(\mathrm{e}^m-4)\ge 0$，即 $m\ge\ln 4$。

(3) 求 k 的最小值。

方法一：（端点效应定必要 + 导数验充分）令 $D(x)=f(k+x)+f(k-x)-2f(k)$，$f'(t)=(t+1)\mathrm{e}^t-3$，$f''(t)=(t+2)\mathrm{e}^t$。则 $D(0)=0$，$D'(x)=f'(k+x)-f'(k-x)$，$D'(0)=0$，$D''(x)=f''(k+x)+f''(k-x)$。

必要性：若 $k<-2$，则 $D''(0)=2(k+2)\mathrm{e}^k<0$，由连续性 x 在 0 右侧 $D''(x)<0$，D' 递减；又 $D'(0)=0$，故小 $x>0$ 时 $D'(x)<0$，D 递减，$D(x)<0$ 矛盾。故 $k\ge -2$。

充分性（$k\ge -2$）：记 $w(t)=(t+1)\mathrm{e}^t$（$w'=f''$），$D'(x)=w(k+x)-w(k-x)$。(i) $k=-2$ 时 $D'(x)=\mathrm{e}^{-2}\big[(x-1)\mathrm{e}^x+(x+1)\mathrm{e}^{-x}\big]$，记方括号内为 $v(x)$，$v(0)=0$，$v'(x)=x(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})>0$，故 $v>0$，$D'(x)>0$。(ii) 视 $D'(x)$ 为 k 的函数，$\partial_k D'(x)=f''(k+x)-f''(k-x)>0$（因 $k+x>-2$ 使 $f''(k+x)>0$，且 f'' 在 $(-2,\infty)$ 递增使 $f''(k+x)>f''(k-x)$），故 $D'(x)$ 关于 k 递增，$k\ge -2$ 时 $D'(x)\ge D'(x)\big|_{k=-2}>0$。于是 D 递增，$D(x)>0$。结合必要性，$k_{\min}=-2$。

方法二：（因式分解 + 对勾比值）直接化简

$$D(x)=\mathrm{e}^k\big[k\,A(x)+B(x)\big],\quad A(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2,\ B(x)=x(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}).$$

对 $x>0$，$A(x)=\big(\mathrm{e}^{x/2}-\mathrm{e}^{-x/2}\big)^2>0$，$B(x)>0$。要 $D(x)>0$ 即 $kA+B>0$：$k\ge 0$ 时显然成立；$k<0$ 时等价于 $\dfrac{B(x)}{A(x)}>|k|$。令 $R(x)=B(x)-2A(x)$，则 $R(0)=0$，$R'(x)=x(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})-(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$，$R'(0)=0$，$R''(x)=x(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})>0$，故 $R'>0$、$R>0$，即 $\dfrac{B}{A}>2$（$x>0$），且下确界 2 在 $x\to 0^+$ 取得（不取到）。于是对 $\forall x>0$ 成立 $\Leftrightarrow |k|\le 2$，结合 $k<0$ 得 $-2\le k<0$；再并 $k\ge 0$ 一支，知条件成立 $\Leftrightarrow k\ge -2$，故 $k_{\min}=-2$。

【背景深挖】（端点效应 / 局部泰勒 + 积分单调性）

(2) 积分单调性一句话。$g'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x-4$ 在 $(0,+\infty)$ 严格增，则 $m>0$ 时 $g(x+m)-g(x)=\displaystyle\int_x^{x+m}g'(t)\,\mathrm{d}t$ 随被积区间右移而增大，故 $g(x+m)-g(x)>\displaystyle\int_0^m g'=g(m)-g(0)=m(\mathrm{e}^m-4)$，只需 $m(\mathrm{e}^m-4)\ge 0$ 即 $m\ge\ln 4$。把“恒成立”读成“积分随区间平移单调”，是这类移位不等式的统一钥匙。

(3) 端点效应是必要条件的“探测器”。$D(0)=D'(0)=0$ 说明 0 是 D 的二阶接触点，局部泰勒 $D(x)\sim\dfrac{D''(0)}{2}x^2$。要在 $x\to 0^+$ 为正，必须 $D''(0)\ge 0$，立得 $k\ge -2$——这就是“端点效应”：在使等号成立的临界点用二阶导卡出参数下界。再单独验证临界值 $k=-2$ 充分，即得 $k_{\min}=-2$。这是导数压轴“先必要、再充分”的标准范式，比盲目分类讨论高效得多。

评价：导数综合压轴。(1) 由切线“截距即 $f(0)$、斜率即 $f'(0)$”两要素直接定 a,b，是必拿的入口分；(2) 关键在“凑函数” $g(x)=f(x)-x$，把不等式化为单调比较 $g(x+m)>g(x)$，三种写法本

质同源；(3) 关键是看出 $D(0) = D'(0) = 0$ 后用“端点效应”二阶导卡 $k \geq -2$ 再验临界，或直接因式分解化为对勾比值 $B/A > |k|$。全程体现“化简结构 > 蛮力求导”的解题哲学，是本卷难度与思想性的顶点。