2026年普通高等学校招生全国统一考试

（新高考Ⅰ卷 · 数学）

满分 150 分　考试用时 120 分钟

一、单项选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求．）

1. 样本数据 6, 8, 4, 5, 12 的中位数为　（5 分）

A. 5　B. 6　C. 8　D. 9

【答案】B

解法（排序定位） 将数据从小到大排列为 4, 5, 6, 8, 12，共 5（奇数）个，中位数为正中间第 $\dfrac{5+1}{2}=3$ 个数，即 6.

评价： 中位数是顺序统计量中的第 $\frac{n+1}{2}$ 项（n 为奇数）；务必先排序再取位置，切勿对原始无序数据直接取中间值。

2. 已知平面向量 $\vec{a},\vec{b}$ 不共线，且 $2\vec{a}+y\vec{b}=x\vec{a}-3\vec{b}$，则　（5 分）

A. $x=2,\ y=-3$　B. $x=-2,\ y=3$　C. $x=2,\ y=3$　D. $x=-2,\ y=-3$

【答案】A

解法一（系数比较） $\vec{a},\vec{b}$ 不共线，可作平面的一组基底，向量在基底下表示唯一，故对应系数相等：$x=2,\ y=-3$.

解法二（移项 + 线性无关） 由 $(2-x)\vec{a}+(y+3)\vec{b}=\vec{0}$，因 $\vec{a},\vec{b}$ 线性无关，必有 $2-x=0$ 且 $y+3=0$，即 $x=2,\ y=-3$.

评价： “不共线”即“线性无关”，是“系数对应相等”的唯一性来源；这是平面向量基本定理最直接的考查。

3. 已知集合 $A=\left\{\sin\dfrac{7\pi}{6},\cos\dfrac{5\pi}{3},\tan\dfrac{5\pi}{4}\right\}$，$B=\left\{-\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},1\right\}$，则 $A\cap B=$　（5 分）

A. $\left\{-\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2}\right\}$　B. $\left\{-\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right\}$　C. $\left\{-\dfrac{1}{2},1\right\}$　D. $\left\{-\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},1\right\}$

【答案】C

解法（逐个化简诱导公式）

$$\sin\frac{7\pi}{6}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2},\quad \cos\frac{5\pi}{3}=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2},\quad \tan\frac{5\pi}{4}=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=1.$$

故 $A=\left\{-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1\right\}$，与 B 取交集得 $A\cap B=\left\{-\dfrac{1}{2},1\right\}$.

评价： 常见陷阱是把 $\cos\frac{5\pi}{3}$ 误判为 $-\frac{1}{2}$。$\frac{5\pi}{3}$ 在第四象限，余弦为正，$=\frac{1}{2}$；集合运算前先把所有元素化到最简实数再比对。

4. 曲线 $y=5x+8\ln x$ 在点 $(1,5)$ 处的切线方程为 **（5 分）**

A. $y=3x+2$　　B. $y=5x$　　C. $y=8x-3$　　D. $y=13x-8$

【答案】D

解法（导数的几何意义） $y'=5+\dfrac{8}{x}$，于是 $k=y'|_{x=1}=5+8=13$。由点斜式 $y-5=13(x-1)$，得 $y=13x-8$.

评价： 切线 =“切点 + 斜率（导数值）”。可用切点验证：$x=1$ 时 $y=13-8=5$，过 $(1,5)$，自洽。

5. 已知抛物线 $C_1: y^2=2p_1x\,(p_1>0)$ 和 $C_2: x^2=2p_2y\,(p_2>0)$ 均经过点 $(4,8)$，则 C_1 的焦点与 C_2 的焦点之间的距离为 **（5 分）**

A. 12　　B. $4\sqrt{5}$　　C. 6　　D. $\dfrac{\sqrt{65}}{2}$

【答案】D

解法（代入求 p，再算焦点距离） 代入 $(4,8)$：$C_1:\ 8^2=2p_1\cdot 4\Rightarrow p_1=8$，即 $y^2=16x$，焦点 $\left(\dfrac{p_1}{2},0\right)=(4,0)$； $C_2:\ 4^2=2p_2\cdot 8\Rightarrow p_2=1$，即 $x^2=2y$，焦点 $\left(0,\dfrac{p_2}{2}\right)=\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$. 两焦点距离

$$d=\sqrt{(4-0)^2+\left(0-\tfrac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{16+\tfrac{1}{4}}=\sqrt{\tfrac{65}{4}}=\frac{\sqrt{65}}{2}.$$

评价： 抓住“焦点坐标公式”$y^2=2px$ 焦点 $(\frac{p}{2},0)$、$x^2=2py$ 焦点 $(0,\frac{p}{2})$；两抛物线开口方向不同，焦点分居两条坐标轴。

6. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x+2}{e^x+a}$ 的最大值为 1，则 $a=$ **（5 分）**

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\dfrac{3}{2}$　　D. 2

【答案】B

解法一（分离参数 + 单变量最值） 由选项知 $a>0$，分母恒正，最大值为 1 即 $\dfrac{x+2}{e^x+a}\le 1$ 对一切 x 成立且能取等，亦即 $a\ge x+2-e^x$。令 $\varphi(x)=x+2-e^x$，$\varphi'(x)=1-e^x$，在 $x=0$ 处取最大值 $\varphi(0)=1$。要恰能取等，须 $a=1$.

解法二（切线不等式） 由 $e^x\ge x+1$（等号 $x=0$），得 $e^x+1\ge x+2$，即 $\dfrac{x+2}{e^x+1}\le 1$，等号在 $x=0$ 取得，故 $a=1$.

解法三（直接求导找极值点） $f'(x)=\dfrac{(e^x+a)-(x+2)e^x}{(e^x+a)^2}=\dfrac{a-(x+1)e^x}{(e^x+a)^2}$。设 $f'(x_0)=0$，则 $a=(x_0+1)e^{x_0}$，代入 $f(x_0)=\dfrac{x_0+2}{(x_0+2)e^{x_0}}=e^{-x_0}=1\Rightarrow x_0=0$，从而 $a=(0+1)e^0=1$.

评价： 三种解法本质都用到指数切线不等式 $e^x\ge x+1$，其中解法二最快。

7. 一百零八塔位于宁夏回族自治区青铜峡市，该塔群共有 108 座塔，依山势自上而下排成 12 行，第 i 行塔的座数记为 $a_i\,(i=1,2,\ldots,12)$，其中 $a_1=1$，$a_2=a_3=3$，$a_4=a_5=5$，且 $a_6,a_7,\ldots,a_{12}$

是首项为 7、公差为 2 的等差数列．将 $a_1, a_2, \ldots, a_{12}$ 分为 6 组，每组 2 个数，使每组之和可构成项数为 6 且公差为 $d\,(d>0)$ 的等差数列，则 $d=$ **（5 分）**

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

【答案】B

解法一（奇偶性锁定 + 验证存在） 各行塔数为 $1,3,3,5,5,7,9,11,13,15,17,19$，总和 $=108$。设 6 个组和构成首项 t_1、公差 d 的等差数列，则

$$6t_1+\frac{6\cdot 5}{2}d=108 \;\Rightarrow\; 2t_1+5d=36.$$

所有塔数为奇数，故任意两数之和为偶数，每个组和都是偶数 $\Rightarrow$ t_1 为偶。代入选项：$d=2\Rightarrow t_1=13$（奇，舍）；$d=4\Rightarrow t_1=8$（偶，存）；$d=6\Rightarrow t_1=3$（奇，舍）；$d=8\Rightarrow t_1=-2<0$（舍）。仅 $d=4$ 可行，此时组和为 $8,12,16,20,24,28$，给出可行分组

$$1+7=8,\ 3+9=12,\ 3+13=16,\ 5+15=20,\ 5+19=24,\ 11+17=28,$$

恰好用尽全部 12 个数。

解法二（总和定中心） 6 个组和总和为 108，平均数（中心）$=\dfrac{108}{6}=18$，故组和对称分布于 18 两侧：$18\pm\frac{1}{2}d,\ 18\pm\frac{3}{2}d,\ 18\pm\frac{5}{2}d$。由“组和为偶 + 各项为正”仅 $d=4$ 满足。

评价：先用不变量（总和、奇偶性）把参数锁死，再举一组配对验证存在性——这是“组合配对型选择题”的通法；存在性往往因配对自由度大而自然满足。

8. 设 $U=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_i\in\{-2,-1,1,2\},\ i=1,2,3\}$ 为空间中 64 个点构成的集合，点 $P(1,1,1)$，记样本空间 $\Omega=\complement_U\{P\}$．从 Ω 中随机取一个点，定义随机变量 X 如下：对 Ω 中的每个点 $A(x_1,x_2,x_3)$，令 $X(A)=x_1+x_2+x_3$，则 X 的数学期望为 **（5 分）**

A. $-\dfrac{1}{21}$　　B. $-\dfrac{1}{63}$　　C. 0　　D. $\dfrac{1}{7}$

【答案】A

解法一（整体求和 − 删点修正） 在全集 U 上每个坐标独立、等可能取 $\{-2,-1,1,2\}$，由 $(-2)+(-1)+1+2=0$，故对 U 求和 $\sum\limits_{A\in U}X(A)=3\times16\times0=0$。删去 $P=(1,1,1)$（$X(P)=3$）后

$$\sum_{A\in\Omega}X(A)=0-3=-3,\quad |\Omega|=63,\quad E(X)=\frac{-3}{63}=-\frac{1}{21}.$$

解法二（中心对称配对） U 关于原点中心对称：点 A 与 $-A$ 成对，$X(A)+X(-A)=0$，全部抵消。仅删去 $P=(1,1,1)$ 后，其配对点 $-P=(-1,-1,-1)$ 落单，贡献 $X(-P)=-3$，故 $E(X)=\dfrac{-3}{63}=-\dfrac{1}{21}$.

解法三（列分布列） 由对称性，在 U 上 $P(X=t)=P(X=-t)$。$X(A)=x_1+x_2+x_3$ 取值 $\{\pm6,\pm5,\pm4,\pm3,\pm2,\pm1,0\}$。删去 $P=(1,1,1)$（$X=3$）只破坏 $X=3$ 与 $X=-3$ 的对称：在 U 中 $X=3$ 的点为 $(1,1,1),(2,2,-1)$ 的全排列等共 4 个，删去 $(1,1,1)$ 后满足 $X=3$ 的点剩 3 个，而满足 $X=-3$ 的点仍有 4 个；其余各对仍对称相消，故

$$E(X)=(-3)\cdot\frac{4}{63}+3\cdot\frac{3}{63}=\frac{-12+9}{63}=-\frac{1}{21}.$$

评价： 解法一（线性性加总和）最简便，解法二（对称配对）也很快，三种方法结果一致。

【背景深挖】 **（1）期望的线性性。** $E_U(X)=E(x_1)+E(x_2)+E(x_3)=3E(x_i)$，$x_i$ 在 $\{-2,-1,1,2\}$ 上等概率取值，均值为 0，故全集上 $E_U(X)=0$。

（2）删一个点后的期望。 $E_\Omega(X)=\dfrac{|U|\,E_U(X)-X(P)}{|U|-1}=\dfrac{64\cdot 0-3}{63}=-\dfrac{1}{21}$。从一个对称总体里去掉单个点，结果就由这个点的取值决定。

（3）对称配对。 把每个坐标变号，点 A 与 $-A$ 成对，$X(A)+X(-A)=0$；只有 $P=(1,1,1)$ 的对称点 $-P=(-1,-1,-1)$ 未被删去，留下 -3 的贡献。

二、多项选择题（本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．全部选对得 6 分，部分选对得部分分，有选错得 0 分．）

9. 设 $z=3+2i$，则 （6 分）

A. $\bar z=3-2i$　　B. $|z|=5$　　C. $z^2=5+12i$　　D. $\dfrac{z+3}{z-i}\in\mathbb{R}$

【答案】ACD

解法（逐项验证） A：$\bar z=3-2i$，正确。　B：$|z|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}\neq 5$，错误。

C：$z^2=(3+2i)^2=9+12i+4i^2=5+12i$，正确。

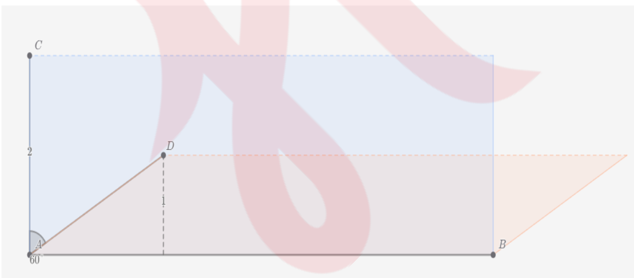
D：$\dfrac{z+3}{z-i}=\dfrac{6+2i}{3+i}=\dfrac{(6+2i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\dfrac{18-6i+6i-2i^2}{10}=\dfrac{20}{10}=2\in\mathbb{R}$，正确。

评价： 判断复数是否为实数，关键是化简（分母实数化）后看虚部是否为 0；$|z|$ 取模别漏开方。

10. 在空间中，A,B 为两定点，动点 C 到直线 AB 的距离为 2，动点 D 到直线 AB 的距离为 1，若二面角 C-AB-D 为 60°，则 （6 分）

A. $\angle CAD\geq 60^\circ$　　B. $CD\geq\sqrt{3}$

C. 当 $AB\perp CD$ 时，$CD\perp$ 平面 ABD　　D. 当 $AB\perp$ 平面 ACD 时，$AC\perp AD$



【答案】BC

解法一（建系：以 AB 为 x 轴） 设 A 为原点，C,D 的垂直分量在与 AB 垂直的平面内、夹角 60°，取

$$C=(c,2,0),\qquad D=\left(e,\tfrac12,\tfrac{\sqrt3}{2}\right),\quad c,e\in\mathbb{R}\ (\text{垂足位置自由}).$$

B：$CD^2=(c-e)^2+\left(2-\tfrac12\right)^2+\left(\tfrac{\sqrt3}{2}\right)^2=(c-e)^2+\dfrac94+\dfrac34=(c-e)^2+3\geq 3$，故 $CD\geq\sqrt3$（$c=e$

取等）。**正确**。

A：$\cos\angle CAD=\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AC}|\,|\overrightarrow{AD}|}=\dfrac{ce+1}{\sqrt{c^2+4}\sqrt{e^2+1}}$。令 $c=e\to+\infty$，该值 $\to 1$，即 $\angle CAD\to 0^\circ<60^\circ$。**错误**。

C：$AB\perp CD\Rightarrow CD$ 的 x 分量为 $0\Rightarrow e=c$，此时 $\overrightarrow{CD}=\left(0,-\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$。平面 ABD 含 x 轴与 $\overrightarrow{AD}=\left(c,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，法向量 $\vec{n}=(1,0,0)\times\left(c,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(0,-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$。由 $\overrightarrow{CD}=\sqrt{3}\vec{n}$ 知 $CD\parallel\vec{n}$，即 $CD\perp$ 平面 ABD。**正确**。

D：$AB\perp$ 平面 $ACD\Rightarrow AC\perp AB, AD\perp AB\Rightarrow c=e=0$，此时 $\overrightarrow{AC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{AD}=\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=1\neq 0$（夹角恰为 60°），故 $AC\not\perp AD$。**错误**。

解法二（降维：垂直于棱 AB 的截面） 把二面角化为垂直于棱的截面角：截面内 C,D 的“半径”长分别为 $2,1$、夹角 60°，故 $|\vec{c}-\vec{d}|^2=2^2+1^2-2\cdot2\cdot1\cos60^\circ=3$，$CD^2=(\text{沿棱位移})^2+3\geq3$（B 对）；$AB\perp CD$ 时 C,D 在棱方向无错位，截面内 $(\vec{d}-\vec{c})\cdot\vec{d}=|\vec{d}|^2-\vec{c}\cdot\vec{d}=1-1=0$ 给出 $CD\perp AD$，又 $CD\perp AB$，故 $CD\perp$ 平面 ABD（C 对）。

评价：“到直线距离 + 二面角”最有效的处理是“先固定二面角骨架、垂足位置设自由参数”，把四个命题统一为代数（点乘、叉乘、取极限）判断；几何作图法（截面角 + 余弦定理）适合 B、C 的速判。

11. 已知圆 $C_1:(x+1)^2+y^2=1$，$C_2:(x-1)^2+y^2=1$，$C_3:x^2+(y-\sqrt{3})^2=1$，直线 $l:y=kx+b$ 与 C_1,C_2,C_3 均有两个交点，记所得弦长分别为 s_1,s_2,s_3，则 **（6 分）**

A. k 可以取任意实数

B. 满足 $s_1=s_2=s_3$ 的直线 l 共有 3 条

C. 满足 $s_1+s_2+s_3=3$ 的直线 l 多于 3 条

D. 当 $b=0$ 时，$s_1+s_2+s_3$ 的最大值为 $\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$

【答案】BCD

解法（统一为“圆心到直线距离”） 三圆心 $O_1(-1,0)$, $O_2(1,0)$, $O_3(0,\sqrt{3})$ 构成边长 2 的正三角形（两两外切），半径均为 1。设圆心到 l 的距离为 d_i，则 $s_i=2\sqrt{1-d_i^2}$，且需 $d_i<1$。

A：将 l 写成 $kx-y+b=0$。三圆均交于两点 $\Leftrightarrow$ 三圆心在 l 法向上的投影极差 $<2\sqrt{k^2+1}$。当 $k=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$（沿三角形某边方向）时极差恰等于 $2\sqrt{k^2+1}$，只能相切，做不到三圆各两交点，故 k 不能取任意实数。**错误**。

B：半径相等，$s_1=s_2=s_3\Leftrightarrow d_1=d_2=d_3\Leftrightarrow l$ 到三顶点等距 $\Leftrightarrow l$ 是正三角形的三条中位线，且此时 $d_i=\dfrac{\sqrt{3}}{2}<1$ 合法，恰 3 条。**正确**。

D：$b=0$ 时 $l:y=kx$ 过原点，$d_1=d_2=\dfrac{|k|}{\sqrt{k^2+1}}$，$d_3=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{k^2+1}}$。令 $t=\dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}}\in(0,1]$，则 $1-d_1^2=t^2$、$1-d_3^2=1-3t^2$，于是

$$S=s_1+s_2+s_3=\underbrace{2t+2t}_{s_1+s_2}+\underbrace{2\sqrt{1-3t^2}}_{s_3}=4t+2\sqrt{1-3t^2}.$$

令 $u=\sqrt{3}\,t,\ v=\sqrt{1-3t^2}$，则 $u^2+v^2=1$，由柯西不等式

$$S=\frac{4}{\sqrt{3}}u+2v\le\sqrt{\left(\tfrac{16}{3}+4\right)(u^2+v^2)}=\sqrt{\tfrac{28}{3}}=\frac{2\sqrt{21}}{3},$$

当 $t=\dfrac{2}{\sqrt{21}}$（合法）时取等。**正确**。

C：仍取过原点的直线，令 $S=4t+2\sqrt{1-3t^2}=3$，平方整理得 $28t^2-24t+5=0$，解得 $t=\dfrac{1}{2}$ 或 $t=\dfrac{5}{14}$，对应 $k=\pm\sqrt{3}$ 或 $k=\pm\dfrac{\sqrt{171}}{5}$；再加上 B 中的中位线 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$（此时三距离均 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，$S=3$），满足 $s_1+s_2+s_3=3$ 的直线已不止 3 条。**正确**。

评价：“三圆心成正三角形、两两外切”是题眼。弦长统一写成 $2\sqrt{1-d^2}$ 后，等弦 $\Leftrightarrow$ 等距 $\Leftrightarrow$ 中位线；可行斜率 $\Leftrightarrow$ 投影极差约束；最值 $\Leftrightarrow$ 柯西换元。判断 C 这类“解的条数”问题，务必先界定 S 的取值范围再下结论。

【背景深挖】 **（1）把弦长之和投影化**。三圆半径相等，圆心 O_1,O_2,O_3 构成正三角形。直线 l 在每个圆上截得的弦长由圆心到 l 的距离决定，于是三弦长之和可写成圆心在 l 法方向上投影的函数。

（2）用柯西不等式求最值。D 中 $S=\dfrac{4}{\sqrt{3}}u+2v$（$u^2+v^2=1$）在 (u,v) 与 $\left(\frac{4}{\sqrt{3}},2\right)$ 同向时取最大，最大值为 $\left(\frac{4}{\sqrt{3}},2\right)$ 的模 $\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$。

（3）等弦对应的方向。半径相等时三弦相等，等价于 l 到三个圆心距离相等。平面内到正三角形三顶点等距的直线是三条中位线，它们各平行于一边，这正对应使弦长可比较的特殊斜率。

三、填空题（本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分．）

12. 双曲线 $5x^2-6y^2=1$ 的离心率为 __________.　　（5 分）

【答案】 $\dfrac{\sqrt{66}}{6}$

解法（化标准式） 化为 $\dfrac{x^2}{1/5}-\dfrac{y^2}{1/6}=1$，则 $a^2=\dfrac{1}{5}$，$b^2=\dfrac{1}{6}$，双曲线 $c^2=a^2+b^2=\dfrac{11}{30}$，

$$e=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{11/30}{1/5}}=\sqrt{\frac{11}{6}}=\frac{\sqrt{66}}{6}.$$

评价：标准化要看清是双曲线（$c^2=a^2+b^2$，与椭圆 $c^2=a^2-b^2$ 相反）；$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{11}{6}}$ 亦可直接得到。

13. 已知 $f(x)=2\sin(ax+\theta)\ (a\in\mathbb{Z},\ 0\le\theta<2\pi)$ 是偶函数，且在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，则 $\theta=$ ________，$f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=$ ________.　　（5 分）

【答案】 $\theta=\dfrac{3\pi}{2}$，$f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=1$

解法（奇偶 → 单调性筛选） 展开 $f(x)=2\sin(ax)\cos\theta+2\cos(ax)\sin\theta$，偶函数要求奇部系数为零，即 $\cos\theta=0$；又 $0\le\theta<2\pi$，故 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\dfrac{3\pi}{2}$。

- $\theta=\dfrac{\pi}{2}$：$f=2\cos(ax)$，在 $x=0$ 处取极大值，不可能在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上递增，舍。
- $\theta=\dfrac{3\pi}{2}$：$f=-2\cos(ax)$，$f'(x)=2a\sin(ax)$。要在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上 $f'>0$，须 $0<|a|x<|a|\frac{\pi}{2}\le\pi$，即 $|a|\le 2$；结合 $a\in\mathbb{Z}$ 得 $a=\pm1,\pm2$。

故 $\theta=\dfrac{3\pi}{2}$。又 $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=-2\cos\left(a\cdot\dfrac{2\pi}{3}\right)$，对 $a=\pm1,\pm2$ 均有 $\cos\left(a\cdot\dfrac{2\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$，故 $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=1$（唯一确定）。

评价：偶函数条件 $\Leftrightarrow$ “正弦项（奇部）系数为 0”；单调性再把 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 淘汰。注意 a 虽不唯一，但 $f(\frac{2\pi}{3})$ 因 $\cos(\pm\frac{2\pi}{3})=\cos(\pm\frac{4\pi}{3})=-\frac{1}{2}$ 而唯一。

14. 设实数 q 满足：存在数列 $\{a_n\}$，使对任意 $n\in\mathbb{N}^*$ 均有 $a_1+a_2+\cdots+a_{3n}=n^2+n$，且 $\{a_n\}$ 中有某连续 9 项 $a_k,a_{k+1},\ldots,a_{k+8}$ 是公比为 q 的等比数列，则 q 的最大值为 ________. （5 分）

【答案】 $\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}\left(=\dfrac{\sqrt[3]{12}}{2}\right)$

解法（差分得“块和”＋窗口计数） 由 $S_{3n}=n^2+n$ 作差，第 n 个“三连块”之和

$$a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}=S_{3n}-S_{3(n-1)}=2n,$$

即按 3 项分块，第 n 块和为 $2n$（隐藏的等差结构）。设连续 9 项为 $t,tq,\ldots,tq^8$。长度 9 的窗口落在“按 3 分块”的格点上，所含完整块数只能是 3（对齐）或 2（错位）：

- **对齐（含 3 完整块，块号 $m,m+1,m+2$）**：$tq^{0,3,6}\cdot(1+q+q^2)$ 分别等于 $2m,2(m+1),2(m+2)$，得 $q^3=\dfrac{m+1}{m}=\dfrac{m+2}{m+1}$，导致 $(m+1)^2=m(m+2)$ 矛盾，不可能。
- **错位（恰含相邻 2 完整块 $p,p+1$）**：两块各为等比中相隔 3 项的三项和，故 $q^3=\dfrac{2(p+1)}{2p}=\dfrac{p+1}{p}$。

要 q 最大须 p 最小。块号 1 一旦完整必导致窗口对齐（被迫含 3 块，已排除），故错位窗口能含的最小完整块是第 2, 3 块，此时 $q^3=\dfrac{T_3}{T_2}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$，即

$$q_{\max}=\sqrt[3]{\tfrac{3}{2}}.$$

（取 $k=2$，令第 2, 3 块为等比相邻六项，其余项自由调配补足块和即可实现。）

评价：分两步：其一，对 S_{3n} 差分得“第 n 块和 $=2n$”；其二，9 项窗口在三分块格点上仅能“对齐 3 块”或“错位 2 块”。对齐被等比性排除，错位给出 $q^3=\frac{p+1}{p}$，p 越小 q 越大；$p=1$ 因被迫对齐而不可达，故 $p_{\min}=2$，$q_{\max}=\sqrt[3]{3/2}$。

【背景深挖】 **（1）差分还原块结构。**题目只给出三倍下标的部分和 S_{3n}，相邻相减得到“每连续三项一块、块和成首项与公差均为 2 的等差数列”，即第 n 块之和为 $2n$。块内三项的分配仍是自由的。

（2）为什么 q^3 取不到 2。若想让公比满足 $q^3=2$，需要某个长度 9 的窗口恰好盖住前两块（和 $2,4$）。但长度 9 的窗口一旦从第 1 项起算，就会同时盖住第 $1,2,3$ 三整块，与等比要求冲突，所以上界只能到 $\dfrac{3}{2}$。

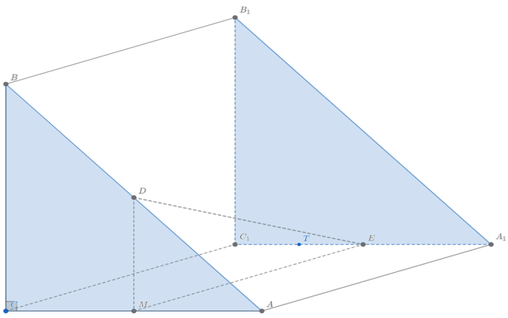
（3）三个条件一起定上界。块和 $=2n$ 的整体约束、等比的局部结构、以及窗口对块的覆盖方式，三者合起来给出 $q^3=\dfrac{p+1}{p}\le\dfrac{3}{2}$。

四、解答题（本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．）

15. （13 分）如图，在直三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=BC$，D,E 分别为 AB，A_1C_1 的中点.

（1）证明：$DE\parallel$ 平面 BCC_1B_1；

（2）设 $CC_1=2$，直线 DE 与平面 ACC_1A_1 所成的角为 45°，求直线 DE 到平面 BCC_1B_1 的距离.



【答案】（1）见证明；　（2）距离为 2

解法一（建系，向量统一处理） 以 C 为原点，CA,CB,CC_1 为 x,y,z 轴。设 $AC=BC=a$，$CC_1=h$，则

$$C(0,0,0),\ A(a,0,0),\ B(0,a,0),\ A_1(a,0,h),\ C_1(0,0,h),$$

$D=\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right)$，$E=\left(\frac{a}{2},0,h\right)$，从而 $\overrightarrow{DE}=\left(0,-\frac{a}{2},h\right)$。

(1) 平面 BCC_1B_1 即 $x=0$，法向量 $\vec{m}=(1,0,0)$。由 $\overrightarrow{DE}\cdot\vec{m}=0$ 知 $\overrightarrow{DE}\perp\vec{m}$，且 D 的横坐标 $\frac{a}{2}\neq0$（$D\notin$ 平面），故 $DE\parallel$ 平面 BCC_1B_1。

(2) 取 $h=CC_1=2$，则 $\overrightarrow{DE}=\left(0,-\frac{a}{2},2\right)$。平面 ACC_1A_1 即 $y=0$，法向量 $\vec{n}=(0,1,0)$。由线面角

$$\sin45^\circ=\frac{|\overrightarrow{DE}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{DE}|}=\frac{a/2}{\sqrt{a^2/4+4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \Rightarrow\ \frac{a^2/4}{a^2/4+4}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ a^2=16,\ a=4.$$

$DE\parallel$ 平面 BCC_1B_1 $(x=0)$，距离等于 DE 上任意点的横坐标，$d=\dfrac{a}{2}=2.$

解法二（纯几何：中位线 + 平行四边形）(1) 取 BC 中点 F。在 $\triangle ABC$ 中 DF 为中位线，$DF\parallel AC$ 且 $DF=\frac{1}{2}AC$；又 E 为 A_1C_1 中点，$EC_1\parallel AC$ 且 $EC_1=\frac{1}{2}A_1C_1=\frac{1}{2}AC$。故 $DF\parallel EC_1$ 且 $DF=EC_1$，DFC_1E 为平行四边形，$DE\parallel FC_1$。而 $FC_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，$DE\not\subset$ 该平面，故 $DE\parallel$ 平面 BCC_1B_1。

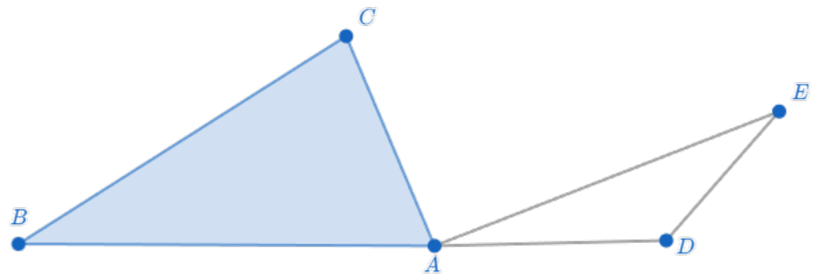
(2) 由 $DE\parallel FC_1$，所求距离即 D 到平面 BCC_1B_1 的距离 DF。直三棱柱中 $CC_1\perp$ 平面 ABC 故 $CC_1\perp BC$，又 $AC\perp BC$，故 $BC\perp$ 平面 ACC_1A_1；由 $DF\parallel AC$ 得 $DF\perp$ 平面 BCC_1B_1，且 $DF=\frac{1}{2}AC=\frac{a}{2}$。再由线面角 45° 算得 $a=4$，故距离 $DF=\dfrac{a}{2}=2.$

评价： 两条注意：其一，E 取 A_1C_1 中点，故平行的是 FC_1（F 为 BC 中点）而非 BC_1，切勿误判；其二，$CC_1=2$ 时由 $\sin45^\circ$ 解得 $a=4$，距离 $\frac{a}{2}=2$。建系法把“平行 / 线面角 / 距离”统一为内积，最稳健。

16. （15 分）已知在 $\triangle ABC$ 中，$AB=3$，$BC=2\sqrt{3}$，$\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

（1）求 $\cos A$；

（2）设 D, E 满足：D 在 BA 的延长线上，$DE \parallel BC$，$AE \perp AC$．若 $DE = \sqrt{6}$，求 CE．



【答案】（1）$\cos A = \frac{1}{3}$**；　（2）**$CE = 3\sqrt{5}$

(1)（余弦定理）　$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,AB \cdot BC \cos B = 9 + 12 - 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 21 - 12 = 9$，故 $AC = 3$。再由余弦定理

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2\,AB \cdot AC} = \frac{9 + 9 - 12}{2 \cdot 9} = \frac{1}{3}.$$

(2) 由 $\cos A = \frac{1}{3}$ 得 $\sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$，且 $AB = AC = 3$（等腰）。

解法一（坐标法） 令 $A = (0,0)$，AC 沿 x 轴，$C = (3,0)$。由 $AE \perp AC$，E 在 y 轴上，设 $E = (0,e)$；$B = (3\cos A, 3\sin A) = (1, 2\sqrt{2})$（可验 $BC = 2\sqrt{3}$）。D 在 BA 延长线上：$D = (-t, -2\sqrt{2}\,t)\,(t > 0)$。由 $DE \parallel BC$（$\overrightarrow{BC} = (2, -2\sqrt{2})$），$E = D + \lambda\overrightarrow{BC}$，由 $E_x = 0$ 得 $\lambda = \frac{t}{2}$，于是

$$\overrightarrow{DE} = \lambda\overrightarrow{BC} = (t, -\sqrt{2}\,t), \quad DE = \sqrt{3}\,t = \sqrt{6} \Rightarrow t = \sqrt{2}.$$

故 $E = \left(0,\ -2\sqrt{2}\,t - 2\sqrt{2}\,\lambda\right) = (0, -6)$，$CE = \sqrt{(3-0)^2 + (0+6)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

解法二（解三角形，作高线） 取 BC 中点 O，延长 OA 交直线 DE 于 H。$\triangle ABC$ 等腰（$AB = AC$），$AO \perp BC$，$AO = \sqrt{AC^2 - OC^2} = \sqrt{9-3} = \sqrt{6}$，且 $\tan\frac{A}{2} = \frac{OC}{OA} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$。$DE \parallel BC$ 故 $AH \perp DE$；设 $HA = m$，在 $\triangle HAD$ 中 $\tan\angle HAD = \tan\frac{A}{2} = \frac{HD}{m} \Rightarrow HD = \frac{\sqrt{2}}{2}m$。又 $\angle HAE = \pi - \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$，$\tan\angle HAE = \frac{1}{\tan\frac{A}{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow HE = \sqrt{2}\,m$。由 $DE = HE - HD = \sqrt{2}\,m - \frac{\sqrt{2}}{2}m = \frac{\sqrt{2}}{2}m = \sqrt{6} \Rightarrow m = 2\sqrt{3}$。最后在直角梯形中

$$CE = \sqrt{OH^2 + (HE - OC)^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{3} + \sqrt{6}\right)^2 + \left(2\sqrt{6} - \sqrt{3}\right)^2} = 3\sqrt{5}.$$

解法三（仿射 / 向量） 由 $DE \parallel BC$ 写 $E = D + \lambda(C - B)$，再用 $AE \perp AC$（即 E 在过 A 垂直 AC 的直线上）锁定 λ，最后由 $|DE| = \sqrt{6}$ 定 t。在 $\triangle ACE$ 中 $\angle EAC = 90°$，故 $CE = \sqrt{AC^2 + AE^2} = \sqrt{9 + 36} = 3\sqrt{5}$（其中 $AE = |E_y| = 6$）。

评价：(1) 标准余弦定理两用。(2) 三种解法各有侧重：坐标法最直接，解三角形法用到 $\tan\frac{A}{2}$ 与作垂线，向量法体现 $DE \parallel BC$ 的平移关系。注意 $AE \perp AC$ 把 CE 化为直角三角形斜边 $\sqrt{AC^2 + AE^2}$。

17.　（15 分）设整数 $N \geq 2$，某同学用一个球投篮，至多投 N 次，当且仅当投中 1 次或 N 次均未中时停止．每次投中概率为 $p\,(0 < p < 1)$，各次独立．记 X 为停止时的投篮次数．

（1）当 $N=4,\ p=\frac{1}{3}$ 时，求 X 的分布列；

（2）设 k,m 为自然数：（i）当 $k\le N-1$ 时求 $P(X>k)$；（ii）当 $k+m\le N-1$ 时证明 $P(X>k+m\mid X>k)=P(X>m)$.

【答案】（1）见分布列；　（2）(i) $P(X>k)=(1-p)^k$**；(ii) 见证明**

(1) 记 $q=1-p=\frac{2}{3}$。$X=j\,(1\le j\le 3)$ 表示前 $j-1$ 次未中、第 j 次中；$X=4$ 表示前 3 次未中（第 4 次中否都停）：

$$P(X{=}1)=\frac{1}{3},\quad P(X{=}2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9},\quad P(X{=}3)=\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{3}=\frac{4}{27},\quad P(X{=}4)=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}.$$

分布列：

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{27}$

（校验：$\frac{9}{27}+\frac{6}{27}+\frac{4}{27}+\frac{8}{27}=1$。$P(X{=}4)=q^3p+q^4=q^3(p+q)=q^3=\frac{8}{27}$。）

(2)(i) $k\le N-1$ 时 $\{X>k\}$ 表示前 k 次全部未中（尚未到上限，仍在继续），各次独立，故 $P(X>k)=(1-p)^k$.

(2)(ii) 当 $k+m\le N-1$ 时，$P(X>k+m)=(1-p)^{k+m}$，$P(X>k)=(1-p)^k$，且 $\{X>k+m\}\subset\{X>k\}$，于是

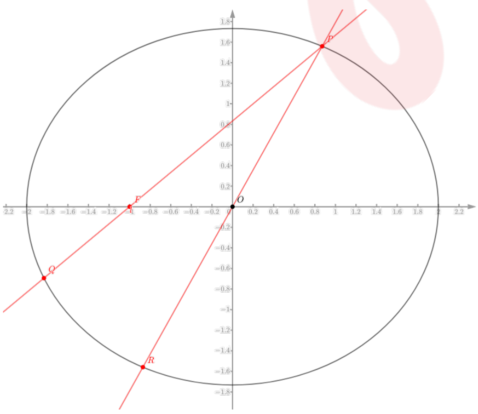
$$P(X>k+m\mid X>k)=\frac{P(X>k+m)}{P(X>k)}=\frac{(1-p)^{k+m}}{(1-p)^k}=(1-p)^m=P(X>m).$$

评价： 在触顶（第 N 次）之前，X 与“首次成功的等待时间”同分布，本质是几何分布。$\{X>k\}\Leftrightarrow$“前 k 次皆败”，概率 $(1-p)^k$ 只依赖失败次数，故有无记忆性；条件 $k+m\le N-1$ 保证两端都在“未触顶”区间内，使指数公式严格成立。

18. （17 分）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$ 的左焦点为 $F(-1,0)$，离心率为 $\frac{1}{2}$.

（1）求 C 的方程；

（2）设 O 为原点，过 F 且斜率大于 0 的动直线 l 交 C 于 P,Q（Q 在第三象限），直线 PO 与 C 的另一交点为 R.（i）若 $S_{\triangle PQR}=3\,S_{\triangle PFO}$，求 l 的方程；（ii）求 $\tan\angle PQR$ 的最小值.



【答案】（1） $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$**；　（2）(i)** $y=\frac{\sqrt{5}}{2}(x+1)$**；　(ii) 最小值** $4\sqrt{3}$

(1) $c=1$，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow a=2$，$b^2=a^2-c^2=3$，故 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

设 $l:y=k(x+1)\,(k>0)$，代入椭圆得 $(3+4k^2)x^2+8k^2x+4k^2-12=0$，由韦达定理

$$x_P+x_Q=\frac{-8k^2}{3+4k^2},\qquad x_Px_Q=\frac{4k^2-12}{3+4k^2}.$$

由椭圆关于中心 O 对称，$R=-P$，即 $R(-x_P,-y_P)$，O 为 PR 中点。

(2)(i)

解法一（面积比 → 焦半径） O 为 PR 中点 $\Rightarrow S_{\triangle PQR}=2S_{\triangle OPQ}$；$P,F,Q$ 共线 $\Rightarrow \dfrac{S_{\triangle PFO}}{S_{\triangle OPQ}}=\dfrac{PF}{PQ}$。由 $S_{\triangle PQR}=3S_{\triangle PFO}$ 得 $2S_{\triangle OPQ}=3\cdot\dfrac{PF}{PQ}S_{\triangle OPQ}$，即 $\dfrac{PF}{PQ}=\dfrac{2}{3}$，故 $PF=2FQ$。用左焦点焦半径 $r=a+ex=2+\dfrac{x}{2}$：

$$PF=2+\frac{x_P}{2},\quad QF=2+\frac{x_Q}{2},\quad PF=2QF\Rightarrow x_P-2x_Q=4;$$

又 F 内分 PQ 且 $\overrightarrow{FP}=-2\overrightarrow{FQ}\Rightarrow x_P+1=-2(x_Q+1)\Rightarrow x_P+2x_Q=-3$。联立得 $x_P=\dfrac{1}{2}$，$x_Q=-\dfrac{7}{4}$。于是 $y_P^2=3\left(1-\dfrac{x_P^2}{4}\right)=\dfrac{45}{16}$，$y_P=\dfrac{3\sqrt5}{4}$，$y_Q=-\dfrac{3\sqrt5}{8}$，斜率

$$k=\frac{y_P-y_Q}{x_P-x_Q}=\frac{\frac{3\sqrt5}{4}+\frac{3\sqrt5}{8}}{\frac12+\frac74}=\frac{9\sqrt5/8}{9/4}=\frac{\sqrt5}{2},$$

故 $l:y=\dfrac{\sqrt5}{2}(x+1)$.

解法二（坐标面积 + 韦达消元） $S_{\triangle PQR}=k|x_P-x_Q|$，$S_{\triangle PFO}=\dfrac{|y_P|}{2}=\dfrac{k(x_P+1)}{2}$，面积比为 3 给出 $\dfrac{2(x_P-x_Q)}{x_P+1}=3$，即 $x_P+2x_Q=-3$。令 $u=k^2$，结合 $x_P+x_Q=\dfrac{-8u}{3+4u}$ 解得 $x_P=\dfrac{9-4u}{3+4u}$，$x_Q=\dfrac{-9-4u}{3+4u}$，代入 $x_Px_Q=\dfrac{4u-12}{3+4u}$ 得 $u=\dfrac{5}{4}$，故 $k=\dfrac{\sqrt5}{2}$.

(2)(ii)

解法一（点差法求斜率积） 记 $k=k_{PQ}$，$m=k_{QR}=\dfrac{y_P+y_Q}{x_P+x_Q}$。$P,Q$ 均在椭圆上，作差

$$\frac{(x_P-x_Q)(x_P+x_Q)}{4}+\frac{(y_P-y_Q)(y_P+y_Q)}{3}=0\ \Rightarrow\ \frac14+\frac{k\cdot m}{3}=0\ \Rightarrow\ km=-\frac34,$$

即 $m=-\dfrac{3}{4k}$（这正是椭圆“共轭直径斜率积 $=-\dfrac{b^2}{a^2}$”）。于是

$$\tan\angle PQR=\left|\frac{k-m}{1+km}\right|=\left|\frac{k+\frac{3}{4k}}{1-\frac34}\right|=4k+\frac{3}{k}\ge 2\sqrt{12}=4\sqrt3,$$

等号当 $4k=\dfrac{3}{k}$ 即 $k=\dfrac{\sqrt3}{2}$ 时取得（此时 Q 仍在第三象限，合法）。

解法二（向量叉积 / 点积） $\overrightarrow{QP}=(x_P-x_Q)(1,k)$，$\overrightarrow{QR}=(-x_P-x_Q,-y_P-y_Q)$。利用 $R=-P$ 与 $y=k(x+1)$，整理得

$$\tan\angle PQR=\frac{|\overrightarrow{QP}\times\overrightarrow{QR}|}{\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}}=\frac{3+4k^2}{k}=\frac{3}{k}+4k\ge 4\sqrt3,$$

同样在 $k=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 取等。故 $(\tan\angle PQR)_{\min}=4\sqrt{3}$.

评价： (i) 两条思路：用 $R=-P$ 把 $S_{\triangle PQR}$ 化为 $2S_{\triangle OPQ}$，用焦半径 $r=a+ex$（线性于 x）把焦点弦条件化为关于 x_P,x_Q 的线性方程组，即可求出斜率。(ii) 点差法直接得 $k_{PQ}\cdot k_{QR}=-\frac{3}{4}$，把张角 tan 化为单变量 $4k+\frac{3}{k}$，均值不等式收口。

【背景深挖】（1）**中心对称 $R=-P$ 的用法**。由 $R=-P$ 知 O 是 PR 的中点，于是 $S_{\triangle PQR}=2S_{\triangle OPQ}$，叉积、点积也都成对出现，面积与张角的计算都能借此简化。

（2）**焦半径与焦点弦**。左焦点焦半径 $r=a+ex$ 对 x 是线性的，处理焦点弦的分点比很方便；写成极坐标 $r=\dfrac{b^2/a}{1-e\cos\theta}$ 后，$\dfrac{PF}{QF}=\dfrac{1+e\cos\theta}{1-e\cos\theta}$，配合 $PF=2FQ$ 即可定出 $\cos\theta$。

（3）**一条弦与其中点直径的斜率积**。对椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，弦 PQ 与“过其中点的直径”的斜率之积恒为 $-\dfrac{b^2}{a^2}$。本题中 $R=-P$，QR 恰是这条直径，故 $k_{PQ}\cdot k_{QR}=-\dfrac{3}{4}$，二元最值随之化为一元 $4k+\dfrac{3}{k}$。

19. （17 分）函数 $f(x)$ 定义域为 $\mathbb{R}$，当 $x<0$ 时 $f(x)=2^x$．对任意 $x_0\in\mathbb{R}$，记 $D(x_0)=\{d\in\mathbb{R}\mid f(x_0+d)>f(x_0)\}$．

（1）若当 $x\geq 0$ 时 $f(x)=1-x$，求 $D(-1)$；

（2）若 f 为奇函数，$f(x_1)\leq f(x_2)$ 且 $x_1x_2\neq 0$，证明 $D(x_2)\subseteq D(x_1)$；

（3）设 f 满足：① 若 $f(x_1)\leq f(x_2)$ 则 $D(x_2)\subseteq D(x_1)$；② 当 $0<x<1$ 时 $f(x)<f(0)$．证明：(i) $f(0)\geq 1$；(ii) f 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增．

【答案】（1）$D(-1)=\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$**；　（2）(3) 见证明**

(1) $f(-1)=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$。令 $u=-1+d$，需 $f(u)>\dfrac{1}{2}$。

- $u<0$：$2^u>\dfrac{1}{2}=2^{-1}\Leftrightarrow u>-1$，得 $-1<u<0$；
- $u\geq 0$：$1-u>\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow u<\dfrac{1}{2}$，得 $0\leq u<\dfrac{1}{2}$。

合并 $u\in\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$，即 $d=u+1\in\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$。故 $D(-1)=\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$.

(2) f 奇且 $x<0$ 时 $f(x)=2^x$，故 $f(0)=0$，$x>0$ 时 $f(x)=-2^{-x}$。先求 $x_0\neq 0$ 时的 $D(x_0)$：

$$x_0<0:\ D(x_0)=(0,-x_0);\qquad x_0>0:\ D(x_0)=(-\infty,-x_0]\cup(0,+\infty).$$

（$x_0<0$ 时 $f(x_0)\in(0,1)$，仅当 $x_0+d<0$ 且右移时增大，得 $0<d<-x_0$；$x_0>0$ 时 $f(x_0)=-2^{-x_0}<0$，移到 $(-\infty,0]$ 处 $f\geq 0$ 更大，正半轴内右移亦更大。）按符号讨论 $f(x_1)\leq f(x_2)$：

- $x_1,x_2<0$：$\Leftrightarrow x_1\leq x_2$，$(0,-x_2)\subseteq(0,-x_1)$，即 $D(x_2)\subseteq D(x_1)$；
- $x_1,x_2>0$：$\Leftrightarrow x_1\leq x_2$，$(-\infty,-x_2]\subseteq(-\infty,-x_1]$，故 $D(x_2)\subseteq D(x_1)$；
- $x_1>0,x_2<0$：此时 $f(x_1)<0<f(x_2)$ 自然成立，$D(x_2)=(0,-x_2)\subseteq(0,+\infty)\subseteq D(x_1)$。

（$x_1<0<x_2$ 时 $f(x_1)>0>f(x_2)$，与 $f(x_1)\leq f(x_2)$ 矛盾，不出现；条件 $x_1x_2\neq 0$ 恰排除退化。）故恒有 $D(x_2)\subseteq D(x_1)$。

(3)(i) 反设 $f(0)<1$。因 $2^u\to 1\,(u\to 0^-)$，可取 $u<0$ 使 $2^u>f(0)$，即 $f(0)<f(u)$；再取 $0<h<\min\{-u,1\}$，则 $u+h<0$，$f(u+h)=2^{u+h}>2^u=f(u)$，故 $h\in D(u)$。由

①（$f(0)\le f(u)$）得 $D(u)\subseteq D(0)$，于是 $h\in D(0)$，即 $f(h)>f(0)$。但 $0<h<1$，由 ② 有 $f(h)<f(0)$，矛盾。故 $f(0)\ge 1$.

(3)(ii) 先由负半轴 2^x 提炼两条“门槛”：

- **右移门槛**：$\forall h>0$，若 $f(x)<2^{-h}$，则 $f(x+h)>f(x)$。
  证：取 $u<-h$ 且 $2^u>f(x)$（因 $f(x)<2^{-h}$ 可办到），则 $f(u)=2^u>f(x)$，由 ① 得 $D(u)\subseteq D(x)$；又 $u+h<0$，$f(u+h)=2^{u+h}>2^u=f(u)$，故 $h\in D(u)\subseteq D(x)$，即 $f(x+h)>f(x)$。

- **左移门槛**：若 $f(x)>0$，则 $\forall h>0$，$f(x-h)\le f(x)$。
  证：取 $u<0$ 使 $2^u\le f(x)$，则 $f(u)\le f(x)$，由 ① 得 $D(x)\subseteq D(u)$；而 $f(u-h)=2^{u-h}<2^u=f(u)$，即 $-h\notin D(u)$，故 $-h\notin D(x)$，即 $f(x-h)\le f(x)$。

第一步（$0<x<1$ 时 $f(x)\le 0$）：由 ②，$f(0)>f(x)$；在左移门槛中取该 x、$h=x$：若 $f(x)>0$ 则 $f(0)=f(x-h)\le f(x)$，与 $f(0)>f(x)$ 矛盾，故 $f(x)\le 0$。

第二步（$\forall x>0,\ f(x)\le 0$）：反设存在 $a>0$ 使 $f(a)>0$。由左移门槛，$f(0)\le f(a)$，结合 (i) 得 $f(a)\ge 1$。取 $0<t<\min\{a,1\}$（由第一步 $f(t)\le 0$），再取 $u<0$ 使 $2^u<f(a)$，令 $v=t-a+u<u<0$。则 $f(v)=2^v<2^u=f(u)$，由 ① 得 $D(u)\subseteq D(v)$；又位移 $d=a-u>0$ 满足 $f(u+d)=f(a)>2^u=f(u)$，即 $d\in D(u)\subseteq D(v)$。于是 $f(v+d)>f(v)$，而 $v+d=t$，得 $f(t)>f(v)=2^v>0$，与 $f(t)\le 0$ 矛盾。故正半轴恒有 $f(x)\le 0$。

第三步（严格递增）：任取 $0<x_1<x_2$，令 $h=x_2-x_1>0$。由第二步 $f(x_1)\le 0<2^{-h}$，故 $f(x_1)<2^{-h}$，由右移门槛得 $f(x_1+h)>f(x_1)$，即 $f(x_2)>f(x_1)$。故 f 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调递增。

评价：(2) 关键是先写清奇函数下 $D(x)$ 的精确形状，再按 x_1,x_2 符号分类。(3) 的关键是用负半轴上的 2^x 作参照，得到两条门槛规则：右移门槛保证“足够小的值必能右移上升”，左移门槛保证“正值处不能左移上升”。先压住 $(0,1)$、再压住整条正半轴 $f\le 0$，最后右移门槛一击得严格递增。

【背景深挖】 **（1）集合 D 的平移含义**。记 $S(c)=\{y\mid f(y)>c\}$，则 $D(x_0)=S\big(f(x_0)\big)-x_0$，即把”函数值超过 $f(x_0)$ 的点集”整体左移 x_0。由 $f(x_1)\le f(x_2)$ 得 $S(f(x_2))\subseteq S(f(x_1))$，这正是条件 ① 的来源。

（2）用负半轴的 2^x 当参照。负半轴上 $f=2^x$ 连续、严格增、可精确比较，所有门槛规则都在这里取锚点 $u<0$，再用 ① 把正半轴上未知的 f 与已知的 2^x 联系起来。

（3）从集合关系推单调。本题不直接比较函数值，而是比较集合 D：借助集合包含的传递与平移，先得到正半轴上 $f\le 0$，再得到 f 严格递增。这种”由集合关系推出函数性质”的思路，是抽象函数压轴题常见的处理方式。