高 2026 届

数学参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.【答案】B

【详解】集合 $B=\{x\,|\,|x-3|<1\}=\{x\,|\,2<x<4\}$，

因为 $A=\{x\,|\,1\le x\le 3\}$，所以 $A\cup B=\{x\,|\,1\le x<4\}$．故选：B．

2.【答案】C

【详解】由题意可得 $z=\dfrac{4-3\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=\dfrac{(4-3\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}=\dfrac{8-6\mathrm{i}-4\mathrm{i}+3\mathrm{i}^2}{4-\mathrm{i}^2}=1-2\mathrm{i}$，所以复数 z 虚部为 -2 .故选：C.

3.【答案】D

【详解】圆锥高 $h=4$，底面半径 $r=3$，则母线长 $l=\sqrt{r^2+h^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

圆锥侧面积为 $S_{侧}=\pi rl=15\pi$.故选：D.

4.【答案】B

【详解】因大米质量 $\xi \sim N(10,\sigma^2)$，且 $P(9.98\le\xi\le10.02)=0.98$，

则 $P(\xi>10.02)=\dfrac{1-P(9.98\le\xi\le10.02)}{2}=0.01$，

所以大米质量在 $10.02\mathrm{kg}$ 以上的袋数大约为 $2000\times0.01=20$．故选：B．

5.【答案】B

【详解】$a_3a_4<a_2^2\Rightarrow a_1^2q^5<a_1^2q^2\Rightarrow q^3<1\Rightarrow q<1$ 且 $q\ne0$，

因为 $0<q<1$ 能推出 $q<1$ 且 $q\ne0$，但 $q<1$ 且 $q\ne0$ 不一定能推出 $0<q<1$，

所以“$a_3a_4<a_2^2$”是“$0<q<1$”的必要不充分条件．故选：B．

6.【答案】C

【详解】由对勾函数的单调性可知，函数 $y=x+\dfrac{4}{x}$ 在区间 $(0,2)$ 上单调递减，在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，

因为函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，所以函数 $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$ 在 $[a,+\infty)$ 上为增函数，

则 $[a,+\infty)\subseteq[2,+\infty)$，即 $a\ge2$，

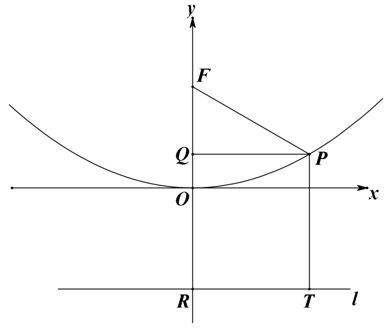
又因为函数 $f(x)=\dfrac{1}{4}x+4$ 在 $(-\infty,a)$ 上为增函数，且函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，

则有 $\dfrac{1}{4}a+4\le a+\dfrac{4}{a}$，因 $a\ge2$，则可得 $(3a-4)(a-4)\ge0$，解得 $a\ge4$，

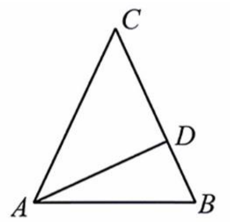
故实数 a 的取值范围是 $[4,+\infty)$，即 a 的最小值为 4．故选：C．

7.【答案】B

【详解】如图，设 $|PF|=|PT|=t$，过 P 作 y 轴的垂线，垂足为 Q，因为 PF 的斜率为 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\angle PFO=\dfrac{\pi}{3}$，所以在 PFQ 中，$|FQ|=\dfrac{t}{2}$，所以 $|FR|=\dfrac{t}{2}+t=2$，所以 $t=\dfrac{4}{3}$．故选：B．



8.【答案】A



【详解】依题意，如图，设 $BD=x$，则 $AD=DC=2x, BC=3x$，

在 ABD 中，由余弦定理：$\cos\angle ADB=\dfrac{AD^2+BD^2-AB^2}{2\cdot AD\cdot BD}=\dfrac{5x^2-1}{4x^2}$，

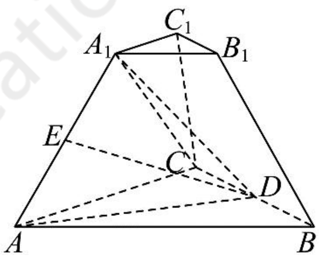
在 ACD 中，由余弦定理：$\cos\angle ADC=\dfrac{AD^2+DC^2-AC^2}{2\cdot AD\cdot DC}=\dfrac{8x^2-b^2}{8x^2}$.

由于 $\angle ADB+\angle ADC=\pi$，所以 $\cos\angle ADB+\cos\angle ADC=0$，带入有 $18x^2=b^2+2$.

在 ABC 中，由余弦定理：$BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos A$，得 $9x^2=1+b^2-b$，联立解得 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}, b=2$．故选：A.

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9.【答案】AC



【详解】对于选项 A：正三棱台的上下底面互相平行，即平面 ABC // 平面 $A_1B_1C_1$，

又 $AD\subset$ 平面 ABC，$AD\not\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，根据面面平行的性质，可得 AD // 平面 $A_1B_1C_1$，A 正确；

对于选项 B：E 在侧棱 AA_1 上，D 在 BC 上，因为 AA_1, BC 是异面直线，所以 ED 与 A_1C 是异面直线，B 错误；

对于选项 C：ABC 是正三角形，D 是 BC 中点，故 $BC\perp AD$；

因为正三棱台是由正三棱锥利用平行于底面的截面截去小三棱锥得到，所以 $BC\perp AA_1$，

因为 $AA_1\subset$ 平面 A_1AD，$AD\subset$ 平面 A_1AD，$BC\perp AD$，$BC\perp AA_1$ 且 $AD\cap AA_1=A$，

故 $BC\perp$ 平面 A_1AD，C 正确；

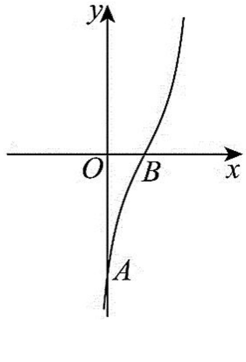
对于选项 D：$\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}$，设 $\overrightarrow{A_1C_1}=\lambda\overrightarrow{AC}\,(0<\lambda<1)$，

则 $\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}\right)\cdot\lambda\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}\lambda\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\lambda\overrightarrow{AC}^2-\dfrac{1}{2}\lambda\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA_1}\right)\cdot\overrightarrow{AC}$

$=\dfrac{1}{2}\lambda\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\lambda\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{AC}$，因为 $\left\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right\rangle$、$\left\langle\overrightarrow{A_1C},\overrightarrow{AC}\right\rangle$ 都是锐角，所以 $\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}>0$，D 错误.

故选：AC.

10.【答案】AD



【详解】对于选项 A：由题意可得 $f(0)=\tan\varphi=-\sqrt{3}$，又因 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$，

则 $f(x)=\tan\left(\omega x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，

又因为 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\tan\left(\dfrac{\pi\omega}{6}-\dfrac{\pi}{3}\right)=0$，所以 $\dfrac{\pi\omega}{6}-\dfrac{\pi}{3}=k\pi\,(k\in\mathbf{Z})$，解得 $\omega=6k+2\,(k\in\mathbf{Z})$，

由图可知函数 $f(x)$ 的最小正周期 T 满足 $\dfrac{T}{2}>\dfrac{\pi}{6}-0$，即 $T>\dfrac{\pi}{3}$，即 $\dfrac{\pi}{\omega}>\dfrac{\pi}{3}$，

故 $\omega=6k+2\in(0,3)$，因为 $k\in\mathbf{Z}$，故 $k=0$，$\omega=2$，

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{\pi}{2}$，A 正确；

对于选项 B：由 A 选项可知 $f(x)=\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，当 $\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$0<2x-\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}$，故函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ 上不单调，B 错误；

对于选项 C：由 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left(2\times\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，故 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ 不是函数 $f(x)$ 的一个对称中心，C 错误；

对于选项 D：因为 $f(x)=\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left(2x+\frac{2\pi}{3}-\pi\right)=\tan\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=\tan\left[2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]$，所以 $f(x)$ 的图象可以由 $g(x)=\tan 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度得到，D 正确.

故选：AD.

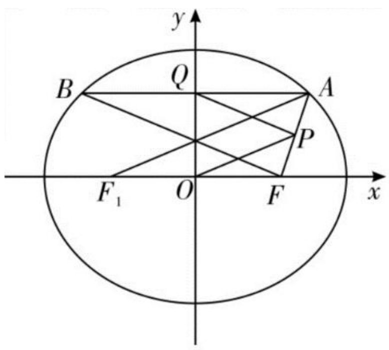
11.【答案】ACD

【详解】对于选项 A：由题意得 $a=2,b=c=\sqrt{2}$，因为 P 为线段 AF 中点，所以 $|PA|=\frac{1}{2}|AF|$. 因为 $|AF|$ 的最小值为 $a-c=2-\sqrt{2}$，所以 $|PA|$ 的最小值为 $\frac{1}{2}\left(2-\sqrt{2}\right)=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$，A 正确.

对于选项 B：由题意右焦点 $F\left(\sqrt{2},0\right)$，设点 $A(x_0,y_0)$，因为 A,B 关于 y 轴对称，所以 $B(-x_0,y_0)$，所以 $k_{AF}\cdot k_{BF}=\frac{y_0}{x_0-\sqrt{2}}\cdot\frac{y_0}{-x_0-\sqrt{2}}=\frac{y_0^2}{2-x_0^2}$. 因为点 $A(x_0,y_0)$ 在 C 上，所以 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{2}=1$，即 $y_0^2=2-\frac{x_0^2}{2}$，

代入得到 $k_{AF}\cdot k_{BF}=\frac{2-\frac{x_0^2}{2}}{2-x_0^2}=\frac{4-x_0^2}{4-2x_0^2}$，显然 $k_{AF}\cdot k_{BF}$ 随着 x_0 变化而变化，不为定值，B 错误.

对于选项 C：设椭圆 C 的左焦点为 F_1，连接 AF_1，由椭圆的对称性知 $k_{BF}=-k_{AF_1}$ 且 $|BF|=|AF_1|$. 因为 P,Q 分别为线段 AF,AB 的中点，所以 $|PQ|=\frac{1}{2}|BF|=\frac{1}{2}|AF_1|$，又因为 $|PA|=\frac{1}{2}|AF|$，所以由椭圆的定义知 $|PQ|+|PF|=\frac{1}{2}\left(|AF_1|+|AF|\right)=a=2$，C 正确.



对于选项 D：因为 P,Q 分别为线段 AF,AB 的中点，所以 $PQ//BF$. 若 $\angle QPF=90^\circ$，则 $PQ\perp AF$，即 $AF\perp BF$，此时 $k_{AF}\cdot k_{BF}=-1$. 由选项 B，令 $k_{AF}\cdot k_{BF}=\frac{4-x_0^2}{4-2x_0^2}=-1$，解得 $x_0^2=\frac{8}{3},y_0^2=\frac{2}{3}$，所以存在点 A，使得 $\angle QPF=90^\circ$，D 正确.

故选：ACD.

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12.【答案】-2

【详解】因为 $\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=(1,1)$，所以 $k\vec{a}+\vec{b}=(k+1,1)$.

若 $\left(k\vec{a}+\vec{b}\right)\perp\vec{b}$，则 $\left(k\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=0$，所以 $(k+1)\times1+1\times1=k+2=0$，解得 $k=-2$.

13．【答案】$\frac{1}{4}$

【详解】由事件 A,B 相互独立，得 $P(AB)=P(A)P(B)$，代入已知条件得：$P(AB)=p(1-p)=-p^2+p$，二次函数 $y=-p^2+p$ 的图象为开口向下，对称轴为 $p=\frac{1}{2}$ 的抛物线，$(0<p<1)$

故 $\left[P(AB)\right]_{\max}=P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$.

14．【答案】$\{\mathrm{e}\}$

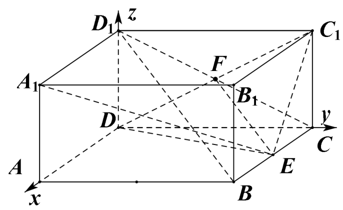
【详解】对任意 $x\in(0,+\infty)$，因为 $f(x)=a^x-x^a\geq 0$，所以 $a^x\geq x^a$，所以 $x\ln a\geq a\ln x$．已知 $a>1$，所以 $\ln a>0$，上式即 $\frac{\ln a}{a}\geq\frac{\ln x}{x}$．设 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$，$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，令 $g'(x)=0$ 解得 $x=\mathrm{e}$，则 $g(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 上单调递增，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递减，$x=\mathrm{e}$ 为 $g(x)$ 的一个极大值点，$g(x)_{\max}=g(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

由题意，$\frac{\ln a}{a}\geq\frac{\ln x}{x}$ 对任意 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立，所以 $\frac{\ln a}{a}\geq g(x)_{\max}=\frac{1}{\mathrm{e}}$，由上述分析可知 $g(a)=\frac{\ln a}{a}\leq\frac{1}{\mathrm{e}}$，当且仅当 $a=\mathrm{e}$ 时取等，所以 $g(a)=\frac{\ln a}{a}=\frac{1}{\mathrm{e}}$

a 的所有可能取值构成的集合为 $\{\mathrm{e}\}$.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15．【答案】（1）证明详见解析；（2）$\frac{\sqrt{6}}{3}$



【详解】(1)如图，连接 D_1C 交 C_1D 于 F，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形且侧棱 $DD_1\perp$ 平面 $ABCD$，所以侧面 CDD_1C_1 为长方形，所以 F 为 D_1C 的中点，

又因为 E 为 BC 的中点，所以在 CD_1B 中，$EF//BD_1$，　　……3 分

因为 $BD_1\not\subset$ 平面 C_1DE，且 $EF\subset$ 平面 C_1DE，所以 $BD_1//$ 平面 C_1DE．　　……5 分

（2）正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为长方体，如图所示，以 D 为原点，DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x,y,z 轴正方向建立空间直角坐标系 $D-xyz$，

因为 $AA_1=1,DA=DC=2$，所以 $A_1(2,0,1),E(1,2,0),C_1(0,2,1)$，　　……7 分

所以 $\overrightarrow{A_1E}=(-1,2,1),\overrightarrow{DC_1}=(0,2,1),\overrightarrow{DE}=(1,2,0)$

设平面 C_1DE 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DC_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2y+z=0\\ x+2y=0\end{cases}$，

令 $y=-1$，则 $x=z=2$，则平面 C_1DE 的一个法向量为 $\vec{n}=(2,-1,2)$，　　……10 分

设直线 A_1E 与平面 C_1DE 所成角为 θ，所以 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{A_1E},\vec{n}\right\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{A_1E}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{A_1E}\right|\left|\vec{n}\right|}=\frac{|-6|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以直线 A_1E 与平面 C_1DE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$．　　……13 分

16.【答案】(1) $\frac{3}{20}$；(2) $\frac{4}{9}$；(3) 分布列见解析，$\frac{43}{30}$

【详解】(1) 记甲，乙，丙三幅作品通过设计图案环节分别为事件 A,B,C，记甲，乙，丙三幅中恰有一幅作品通过设计图案环节为事件 D，

则 $P(D)=P(A\overline{B}\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\overline{B}C)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{3}{20}$.　　……4 分

(2) $P\left(A|D\right)=\frac{P\left(AD\right)}{P\left(D\right)}=\frac{\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}}{\frac{3}{20}}=\frac{4}{9}$.　　……8 分

(3) 记甲，乙，丙三幅作品成为成品的事件分别为 E,F,G，

则 $P\left(E\right)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{5},P\left(F\right)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2},P\left(G\right)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$，　　……9 分

由 X 可取 $0,1,2,3$，

则 $P\left(X=0\right)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{15}$，$P\left(X=1\right)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}==\frac{2}{5}$，

$P\left(X=2\right)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{11}{30}$，$P\left(X=3\right)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$，　　……13 分

则 X 的分布列为　　……14 分

X	0	1	2	3
P	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{1}{10}$

则数学期望 $E\left(X\right)=1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{11}{30}+3\times\frac{1}{10}=\frac{43}{30}$.　　……15 分

17.【答案】(1) $b=\frac{1}{\mathrm{e}}$；(2) $-\frac{1}{2}<a<0$

(1) 因为 $a=0$，所以 $f\left(x\right)=\ln x+\frac{b}{x}$，求导得 $f'\left(x\right)=\frac{1}{x}-\frac{b}{x^2}=\frac{x-b}{x^2}$，　　……2 分

因为 $b\in\left(0,1\right)$，所以令 $f'\left(x\right)=0$，解得 $x=b$，

当 $x\in\left(0,b\right)$，$f'\left(x\right)<0$，所以 $f\left(x\right)$ 单调递减；

当 $x\in\left(b,+\infty\right)$，$f'\left(x\right)>0$，所以 $f\left(x\right)$ 单调递增；　　……4 分

所以 $f\left(x\right)_{\min}=\ln b+1=0$，解得 $b=\frac{1}{\mathrm{e}}$.　　……6 分

(2) 因为 $f\left(x\right)=\ln x+ax+\frac{b}{x}$，求导得 $f'\left(x\right)=\frac{1}{x}+a-\frac{b}{x^2}=\frac{ax^2+x-b}{x^2}$，

又因为 $x=1$ 为 $f\left(x\right)$ 的极小值点，所以 $f'\left(1\right)=0$，得到 $b=a+1$，　　……8 分

代入导数得 $f'\left(x\right)=\frac{ax^2+x-\left(a+1\right)}{x^2}=\frac{\left(ax+a+1\right)\left(x-1\right)}{x^2}$，　　……9 分

因为 $b\in\left(0,1\right)$，所以 $a\in\left(-1,0\right)$，

①当 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时，$f'\left(x\right)=0$，解得 $x=1$ 或 $-1-\frac{1}{a}$，此时 $-1-\frac{1}{a}>1$，

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in\left(1,-1-\dfrac{1}{a}\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in\left(-1-\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点满足条件.　　……11 分

②当 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)=\dfrac{-\frac{1}{2}(x-1)^2}{x^2}\le 0$ 恒成立，

所以 $f(x)$ 在定义域内单调递减，无极值，不满足题意舍去.　　……12 分

③当 $-1<a<-\dfrac{1}{2}$ 时，$f'(x)=0$，解得 $x=1$ 或 $-1-\dfrac{1}{a}$，此时 $0<-1-\dfrac{1}{a}<1$，

所以当 $x\in\left(0,-1-\dfrac{1}{a}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in\left(-1-\dfrac{1}{a},1\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

所以 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极大值点，不满足条件，舍去.　　……14 分

综上，$-\dfrac{1}{2}<a<0$.　　……15 分

18.【答案】(1) $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$；(2) $\sqrt{5}x-y+\sqrt{15}=0$ 或 $\sqrt{5}x+y+\sqrt{15}=0$；(3) $\left[0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$

【详解】(1) 由双曲线 $C:\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(b>0)$，得 $a^2=2$，即 $a=\sqrt{2}$.

已知离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，得 $c=\sqrt{3}$. 由双曲线关系 $c^2=a^2+b^2$，得 $b^2=c^2-a^2=3-2=1$.

因此双曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$.　　……4 分

(2) 由 $c=\sqrt{3}$ 得 $F_1(-\sqrt{3},0)$，设 $G(0,y_G)$，$P(x_0,y_0)$.

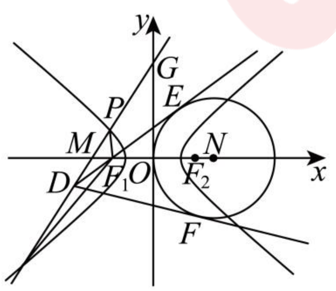
向量 $\overrightarrow{F_1G}=\left(\sqrt{3},y_G\right)$，$\overrightarrow{PF_1}=(-\sqrt{3}-x_0,-y_0)$，

由 $\overrightarrow{F_1G}=3\overrightarrow{PF_1}$ 得 $\left(\sqrt{3},y_G\right)=\left(-3\sqrt{3}-3x_0,-3y_0\right)$，解得 $x_0=-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，

代入双曲线方程得 $y_0=\dfrac{\sqrt{15}}{3},y_G=-\sqrt{15}$，或 $y_0=-\dfrac{\sqrt{15}}{3},y_G=\sqrt{15}$，　　……7 分

故直线 PQ 的斜率 $k=\pm\sqrt{5}$，所以直线 PQ 方程为 $\sqrt{5}x-y+\sqrt{15}=0$ 或 $\sqrt{5}x+y+\sqrt{15}=0$.　　……9 分

(3)



【方法一】设直线 $PQ:x=my+t$，$M(t,0)$，则 $N(-t,0)$，因为圆 N 与 y 轴相切，所以半径 $r=|t|$.

联立直线与双曲线方程$\begin{cases}x=my+t\\ \dfrac{x^2}{2}-y^2=1\end{cases}$，整理得$(m^2-2)y^2+2mty+t^2-2=0$，

因为P,Q在左支，得$0\le m^2<2$，设$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，中点$D(x_D,y_D)$，

由韦达定理得$y_1+y_2=-\dfrac{2mt}{m^2-2},y_1y_2=\dfrac{t^2-2}{m^2-2}$，　　……11 分

则$y_D=\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{mt}{2-m^2},x_D=my_D+t=\dfrac{2t}{2-m^2}$，即$D\left(\dfrac{2t}{2-m^2},\dfrac{mt}{2-m^2}\right)$.　　……12 分

故$|DN|^2=(x_D+t)^2+{y_D}^2=\dfrac{t^2\left(m^4-7m^2+16\right)}{\left(m^2-2\right)^2}$，$|DN|=\dfrac{-t\sqrt{m^4-7m^2+16}}{2-m^2}$，$(t<0)$，

设$\angle EDN=\alpha$，由切线性质$DE\perp NE,\sin\alpha=\dfrac{r}{|DN|}=\dfrac{-t}{|DN|}=\dfrac{2-m^2}{\sqrt{m^4-7m^2+16}}$，　　……14 分

令$u=2-m^2>0$，代入得$\sin\alpha=\dfrac{u}{\sqrt{u^2+3u+6}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{3}{u}+\dfrac{6}{u^2}}}$，由$m^2\ge0$，所以$u\in(0,2]$，

设$t=\dfrac{1}{u}\in\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$，　代入上式得$f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{6t^2+3t+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{6\left(t+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{5}{8}}}$，

可知二次函数$y=6t^2+3t+1$在$\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$内单调递增，所以$y=6t^2+3t+1\in[4,+\infty)$，

因此$\sin\alpha=f(t)\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$，　　……16 分

由切线性质可知　EDN是直角三角形，所以$\alpha=\angle EDN$是锐角，即$\angle EDN\in\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right]$.

则$\angle EDF=2\angle EDN\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right]$，即$\sin\angle EDF$的取值范围$\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$.　　……17 分

【方法二】设$M(x_0,0)$，则$N(-x_0,0)$，因为圆N与y轴相切，所以圆N的半径为$r=|x_0|$，圆N的方程为$(x+x_0)^2+y^2=x_0^2$.

设$D(x_D,y_D)$，由圆的切线性质可知$NE\perp DE,NF\perp DF$，所以$\sin\angle EDN=\dfrac{|EN|}{|DN|},\cos\angle EDN=\dfrac{|ED|}{|DN|}$，由二倍角公式，得到$\sin\angle EDF=\sin(2\angle EDN)=2\sin\angle EDN\cos\angle EDN=2\dfrac{|EN|\cdot|ED|}{|DN|^2}$.　　……11 分

因为$|EN|=|x_0|,|ED|=\sqrt{|DN|^2-x_0^2}$，所以$\sin\angle EDF=2\dfrac{|x_0|\cdot\sqrt{|DN|^2-x_0^2}}{|DN|}$，　　……13 分

令$t=\dfrac{|x_0|}{|DN|}$，则$t\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$，当且仅当$PQ\perp x$轴取等，则

$\sin\angle EDF=2t\sqrt{1-t^2}=2\sqrt{-t^4+t^2}=2\sqrt{-\left(t^2-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}}$，当$t\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$，则$t^2\in\left(0,\dfrac{1}{4}\right]$，因此

$\sin\angle EDF=2\sqrt{-\left(t^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\in\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$，即 $\sin\angle EDF$ 的取值范围 $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.　……17 分

19.【答案】(1) $a_n=n+\cos n$；(2) 证明见解析；(3) $90\frac{\sqrt{1-m^2}}{m}$

【详解】(1) 由 $a_{n+1}=a_n+1+\cos(n+1)-\cos n$ 可得：

$a_2-a_1=1+\cos 2-\cos 1$，$a_3-a_2=1+\cos 3-\cos 2$，$a_4-a_3=1+\cos 4-\cos 3$，……，

$a_{n+1}-a_n=1+\cos(n+1)-\cos n$，由累加法得：$a_{n+1}-a_1=n+\cos(n+1)-\cos 1$，

又因为 $a_1=1+\cos 1$，所以 $a_{n+1}=n+1+\cos(n+1)$，故 $a_n=n+\cos n$.　……4 分

(2) 由 (1) 可得 $a_n=n+\cos n$，

则由 $a_{2n+1}-a_{2n-1}=2n+1+\cos(2n+1)-(2n-1)-\cos(2n-1)<2$，

可得 $\cos(2n+1)-\cos(2n-1)<0$，　……6 分

即 $\cos 2n\cos 1-\sin 2n\sin 1-\cos 2n\cos 1-\sin 2n\sin 1<0$，

整理得 $-2\sin 2n\sin 1<0$，因 $\sin 1>0$，则 $\sin 2n>0$，　……8 分

所以 $(\sin n-\cos n)^2=\sin^2 n+\cos^2 n-2\sin n\cos n=1-\sin 2n<1$，故 $|\sin n-\cos n|<1$.　……10 分

(3) 由 $\cos(n^\circ+1^\circ)-\cos(n^\circ-1^\circ)=\cos n^\circ\cos 1^\circ-\sin n^\circ\sin 1^\circ-(\cos n^\circ\cos 1^\circ+\sin n^\circ\sin 1^\circ)=-2\sin n^\circ\sin 1^\circ$，

可得 $2\sin n^\circ=\frac{\cos(n^\circ-1^\circ)-\cos(n^\circ+1^\circ)}{\sin 1^\circ}$，　……12 分

所以 $2\sin 2^\circ+4\sin 4^\circ+6\sin 6^\circ+\cdots+180\sin 180^\circ$

$$=\frac{\cos 1^\circ-\cos 3^\circ}{\sin 1^\circ}+\frac{2\cos 3^\circ-2\cos 5^\circ}{\sin 1^\circ}+\frac{3\cos 5^\circ-3\cos 7^\circ}{\sin 1^\circ}+\cdots+\frac{89\cos 177^\circ-89\cos 179^\circ}{\sin 1^\circ}+0$$

$$=\frac{1}{\sin 1^\circ}\left(\cos 1^\circ+\cos 3^\circ+\cos 5^\circ+\cos 7^\circ+\cdots+\cos 175^\circ+\cos 177^\circ-89\cos 179^\circ\right)$$　……14 分

$$=\frac{1}{\sin 1^\circ}\left(\cos 1^\circ+\cos 3^\circ+\cos 5^\circ+\cos 7^\circ+\cdots-\cos 7^\circ-\cos 5^\circ-\cos 3^\circ+89\cos 1^\circ\right)$$

$$=\frac{90\cos 1^\circ}{\sin 1^\circ}.$$　……16 分

已知 $\sin 1^\circ=m$，则 $\cos 1^\circ=\sqrt{1-m^2}$，因此原式的计算结果为 $\frac{90\sqrt{1-m^2}}{m}$.　……17 分