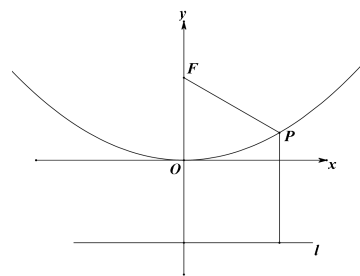


高 2026 届

数学试卷

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

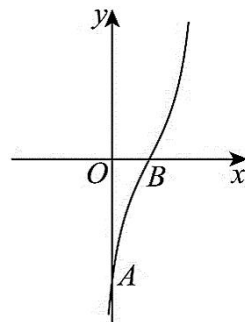
1. 设集合 $A = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x | |x - 3| < 1\}$, 则 $A \cup B =$ ()
 A. $\{x | 2 < x \leq 3\}$ B. $\{x | 1 \leq x < 4\}$ C. $\{x | 2 \leq x \leq 3\}$ D. $\{x | 1 < x < 4\}$
2. 若复数 z 满足 $(2 + i)z = 4 - 3i$, 则复数 z 的虚部为 ()
 A. 1 B. i C. -2 D. $-2i$
3. 已知圆锥的高为 4, 底面半径为 3, 则其侧面积为 ()
 A. 6π B. 9π C. 12π D. 15π
4. 某种包装的大米质量 ξ (单位: kg) 服从正态分布 $\xi \sim N(10, \sigma^2)$, 根据检测结果可知 $P(9.98 \leq \xi \leq 10.02) = 0.98$, 某公司购买该种包装的大米 2000 袋, 则大米质量在 10.02 kg 以上的袋数大约为 ()
 A. 10 B. 20 C. 30 D. 40
5. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 则 “ $a_3 a_4 < a_2^2$ ” 是 “ $0 < q < 1$ ” 的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x + \frac{4}{x}, & x \geq a \\ \frac{1}{4}x + 4, & x < a \end{cases}$ 为增函数, 则 a 的最小值是 ()
 A. $\frac{4}{3}$ B. 2 C. 4 D. 5
7. 如图, 抛物线 $C: x^2 = 4y$ 的焦点为 F , C 上一点 P (P 在第一象限) 满足直线 PF 的斜率为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 P 到抛物线 C 的准线 l 的距离为 ()
 A. 1 B. $\frac{4}{3}$
 C. $\frac{3}{4}$ D. $2(\sqrt{3} - 1)$
8. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , D 是边 BC 上一点, 若 $A = \frac{\pi}{3}$, $AD = DC = 2BD$, $c = 1$, 则 $b =$ ()
 A. 2 B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$



二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 在正三棱台 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, D, E 分别是 BC, AA_1 的中点, 则下列说法正确的是 ()
 A. $AD \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1$ B. $ED \parallel A_1C$ C. $BC \perp$ 平面 A_1AD D. $ED \perp A_1C_1$

10. 已知函数 $f(x) = \tan(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 点 $A(0, -\sqrt{3})$, $B(\frac{\pi}{6}, 0)$ 在 $f(x)$ 的图象上, 则下列说法正确的是()



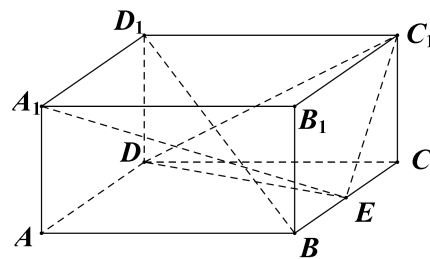
- A. $f(x)$ 的最小正周期是 $\frac{\pi}{2}$
- B. $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ 内单调递增
- C. $f(x)$ 的一个对称中心是 $(\frac{\pi}{3}, 0)$
- D. $f(x)$ 的图象可以由 $g(x) = \tan 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度得到
11. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$, F 为 C 的右焦点, 点 A, B 在 C 上且关于 y 轴对称, P, Q 分别为线段 AF, AB 的中点, O 为坐标原点, 则()
- A. $|PA|$ 的最小值为 $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$
- B. $k_{AF} \cdot k_{BF}$ 为定值
- C. $|PQ| + |PF| = 2$
- D. 存在点 A , 使得 $\angle QPF = 90^\circ$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知向量 $\vec{a} = (1, 0), \vec{b} = (1, 1)$, 若 $(k\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{b}$, 则实数 $k =$ _____.
13. 事件 A 与事件 B 相互独立, $P(A) = p, P(B) = 1 - p (0 < p < 1)$, 则 $P(AB)$ 的最大值为 _____.
14. 已知 $a > 1$, 设函数 $f(x) = a^x - x^a$, 若对任意 $x \in (0, +\infty)$, $f(x) \geq 0$ 恒成立, 则 a 的所有可能取值构成的集合为 _____.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. 如图, 在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是 BC 的中点.
- (1) 证明: $BD_1 \parallel$ 平面 C_1DE ;
- (2) 若 $2AA_1 = AB = 2$, 求直线 A_1E 与平面 C_1DE 所成角的正弦值.



16. 黎锦织造技艺是海南国家级非物质文化遗产，一幅黎锦作品的完成需经过“纺线设计”和“织锦制作”两大独立环节，只有纺线设计通过后才能进行织锦制作，且只有同时通过两个环节才能成为成品。某黎锦工坊准备制作甲、乙、丙三幅不同的黎锦作品，已知甲、乙、丙通过纺线设计环节的概率依次为 $\frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}$ ，通过织锦制作环节的概率依次为 $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ 。

- (1) 求甲、乙、丙三幅中恰有一幅作品通过纺线设计环节的概率；
- (2) 若已知甲、乙、丙三幅中恰有一幅作品通过纺线设计环节，求通过的作品为甲的概率；
- (3) 经过纺线设计和织锦制作两个环节后，甲、乙、丙三幅作品成为成品的件数为 X ，求随机变量 X 的分布列和数学期望。

17. 已知函数 $f(x) = \ln x + ax + \frac{b}{x}$ ， $b \in (0, 1)$ 。

- (1) 当 $a = 0$ 时，若 $f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$ ，求实数 b 的值；
- (2) 若 $x = 1$ 为 $f(x)$ 的极小值点，求实数 a 的取值范围。

18. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$, 左右焦点分别为 F_1, F_2 , P, Q 为双曲线左支上的两点, 直线 PQ 交 y 轴于点 G .

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 若 $\overrightarrow{F_1G} = 3\overrightarrow{PF_1}$, 求直线 PQ 的方程;

(3) 设线段 PQ 的中点为 D , 直线 PQ 交 x 轴于点 M , 点 N 为 M 关于原点的对称点, 以 N 为圆心作 y 轴相切的圆, 过 D 作该圆的两条切线, 切点分别为 E, F , 求 $\sin \angle EDF$ 的取值范围.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_n + 1 + \cos(n+1) - \cos n$, 且 $a_1 = 1 + \cos 1$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $a_{2n+1} - a_{2n-1} < 2$, 求证: $|\sin n - \cos n| < 1$;

(3) 已知 $\sin 1^\circ = m$, 求 $2\sin 2^\circ + 4\sin 4^\circ + 6\sin 6^\circ + \cdots + 180\sin 180^\circ$ 的值. (结果用 m 表示)