高 2023 级高考适应性考试
数学参考答案及评分标准

一、选择题：1．A　2．C　3．A　4．D　5．B　6．C　7．D　8．C

1．解析:由已知条件知：$\mathrm{i}z=1-\mathrm{i}$． 所以 $z=\frac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\frac{(1-\mathrm{i})\mathrm{i}}{\mathrm{i}^2}=\frac{\mathrm{i}+1}{-1}=-\mathrm{i}-1$．

所以该复数的虚部为-1.

2．解析:$\because A=\{x\in \mathrm{Z}\,\|x|<3\}=\{-2,-1,0,1,2\}$，$B=\{1,3,5\}$，

$\therefore A\bigcup B=\{-2,-1,0,1,2,3,5\}$，$\therefore A\cup B$ 的元素个数为 7．

3．解析:由双曲线 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$，得渐近线方程为 $y=\pm\frac{a}{b}x$，又已知双曲线渐近线方程为

$y=\pm 2x$，所以 $\frac{a}{b}=2$．$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$．

4.解析:由点 $(\frac{\pi}{6},0)$ 是函数 $f(x)=\tan(x-\varphi)$ 图象的一个对称中心，得 $\frac{\pi}{6}-\varphi=\frac{k\pi}{2},k\in\mathrm{Z}$，

则 $\varphi=-\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{6},k\in\mathrm{Z}$，所以当 $k=0$ 时，φ 取得最小正值为 $\frac{\pi}{6}$.

5．解析: 由题意可得向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影向量是：$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}^2}\cdot\vec{b}=\frac{6+4}{(-2)^2+1^2}\vec{b}=2\vec{b}$．

6.解析：由题意 $T_{r+1}=\mathrm{C}_5^r(2x)^{5-r}(-y)^r=\mathrm{C}_5^r2^{5-r}(-1)^rx^{5-r}y^r$，令 $\begin{cases}r=3,\\5-r=2,\end{cases}$ 即 $r=3$，

故展开式中 x^2y^3 的系数为 $\mathrm{C}_5^3\times2^2\times(-1)^3=-40$．

7. 解析:$\because$ $y=f(x+1)$ 是定义在 R 上的偶函数，$\therefore$ $f(x+1)=f(-x+1)$，故函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，故有 $f(x)=f(2-x)$．

再由 $y=f(x+1)$ 是定义在 R 上的周期为 2 的函数可得，函数 $f(x)$ 也是周期等于 2 的函数.

故有 $a=f(\frac{1}{2})=f(2-\frac{1}{2})=f(\frac{3}{2})$，$b=f(\frac{4}{3})$，$c=f(-\frac{5}{4})=f(\frac{3}{4})=f(\frac{5}{4})$.又当 $x\in[1,2]$ 时，

$f(x)=\log_2 x$ 是增函数，可得 $c<b<a$，

8．解析:已知保鲜时间 y 与贮藏温度 x 的关系为 $y=\mathrm{e}^{ax+b}$（a,b 为常数）．

当 $x=9$ 时，$y=261$，代入得：$\mathrm{e}^{9a+b}=261$，①

当 $x=23$ 时，$y=29$，代入得：$\mathrm{e}^{23a+b}=29$，②设恰好保留 87 小时的温度为 x．

则 $\mathrm{e}^{ax+b}=87$，③　则①式除以③式得：$3=e^{9a-ax}$，同理：③式除以②式得：$3=e^{ax-23a}$．

所以 $9a-ax=ax-23a$，解得 $x=16$．

所以该蔬菜在物流过程中的贮藏温度不能超过 $16^\circ\mathrm{C}$．

二、选择题：9．AD　　10．BC　　11．ABD

9．解析:在正三棱柱中，$BC\,/\!/\,B_1C_1$，又 $BD\cap BC=B$，故 BD 与 B_1C_1 不平行，B 错误；

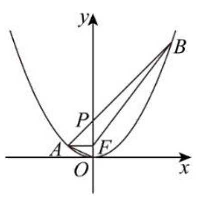
易证 $BD\perp$ 平面 ACC_1A_1，所以 $BD\perp C_1D$，A 正确；

$\because$ $BB_1\perp$ 平面 ABC，又 $BB_1\bigcap$ 面 $BDC_1=B$,所以平面 BDC_1 与平面 ABC 不垂直，C 错误；

$\because$ $BD\perp$ 平面 ACC_1A_1，又 $BD\subset$ 平面 BDC_1，所以平面 $BDC_1\perp$ 平面 ACC_1A_1，D 正确.

10．解析：因为抛物线 E 的方程为 $x^2=4y$，所以 $p=2$，

则 E 的焦点坐标为 $(0,1)$，准线方程为 $y=-1$，所以 A 错误，B 正确；



设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $y_1=2-\frac{p}{2}=1,y_2=10-\frac{p}{2}=9$，

把 $y_1=1,y_2=9$ 代入 $x^2=4y$，可得 $x_1^2=4y_1=4,x_2^2=4y_2=36$，

由抛物线的对称性，不妨设 $A(-2,1),B(6,9)$，则 $|AB|=8\sqrt{2}$，选项 C 正确；

因为$A(-2,1)$，则ΔAOF的面积$S_{\triangle AOF}=\frac{1}{2}|OF|d=\frac{1}{2}\times1\times2=1$，选项 D 错误.

11．解析：由$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=1$,得$bc\sin A=2$（*）,由$\frac{\cos B\cos C}{bc}=\frac{1}{5}$，

得$5\cos B\cos C=bc$，即$5\sin A\cos B\cos C=bc\sin A=2$,则 A 正确.

又由$\frac{\sin A}{bc}+\frac{\sin B}{ac}+\frac{\sin C}{ab}=1$，得$a\sin A+b\sin B+c\sin C=abc$，由正弦定理得：

$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=bc\sin A=2$， 可得$\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}+\sin^2 C=2$，

化简可得$\cos 2A+\cos 2B+2\cos^2 C=0$，

即$\cos[(A+B)+(A-B)]+\cos[(A+B)-(A-B)]+2\cos^2 C=0$（即和差化积），

可得$2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2 C=0$，由$A+B+C=\pi$，则$\cos(A+B)=-\cos C$，

代入上式可得$-2\cos C\cos(A-B)+2\cos^2 C=0$，即$2\cos C[\cos C-\cos(A-B)]=0$.

因为$\frac{\cos B\cos C}{bc}=\frac{1}{5}\neq0$，所以$\cos C\neq0$，$\cos B\neq0$，则$\cos C=\cos(A-B)$，

所以$C=A-B+2k\pi$或$C=-(A-B)+2k\pi$，$k\in Z$.

因为A,B,C是三角形的内角，所以$C=A-B$或$C=B-A$，

当$C=B-A$时，$B=A+C$，即$B=\frac{\pi}{2}$，不合题意.

当$C=A-B$时，$A=B+C$，即$A=\frac{\pi}{2}$，所以$\sin A=1$.由（*），$bc=2$，则 D 正确;

$A=\frac{\pi}{2}$时，在$Rt\Delta ABC$中，$\cos B\cos C=\frac{bc}{a^2}$，代入$\frac{\cos B\cos C}{bc}=\frac{1}{5}$得$a^2=5$，则 B 正确;

由$b^2+c^2=5$，$bc=2$得$b+c=3$，则 C 错误.

三、填空题： 12．$\frac{1}{2}$　　13．$\frac{13}{125}$　　14．4052

12．解析：因为a,b均为正实数，所以$1=a+\frac{1}{2b}\geq2\sqrt{\frac{a}{2b}}\Rightarrow\frac{a}{b}\leq\frac{1}{2}$，

当且仅当$a=\frac{1}{2}$，$b=1$时取等号

13． 解析：由已知条件可得：$P(X>90)=\frac{1-P(60\leq X\leq90)}{2}=\frac{1}{5}$，故任意选取 3 名考生，

至少有 2 名考生的成绩高于 90 的概率为$P=C_3^2\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\frac{4}{5}+\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{13}{125}$.

14．解析：第一次变换是：删除两项a_1,a_2，添加$a_1+a_2+a_1a_2$，

$\because(1+a_1)(1+a_2)=1+a_1+a_2+a_1a_2$，正好是$1+$新添加的项，

也就是说，数列$\{a_n\}$中每一项加 1 的积，等于数列$\{b_n\}$中每一项加 1 的积，也等于数列$\{c_n\}$中每一项加 1 的积………

原数列是$2,\frac{2}{3},\frac{2}{5},\cdots,\frac{2}{4049},\frac{2}{4051}$共 2026 项，

每项加 1 后，初始乘积为：$\prod_{k=1}^{2026}(1+\frac{2}{2k-1})=\prod_{k=1}^{2026}(\frac{2k+1}{2k-1})=\frac{3}{1}\times\frac{5}{3}\times\frac{7}{5}\times\cdots\times\frac{4053}{4051}=4053$

每一次变换会让数列的项数减少1，初始有 2026 项，经过 2025 次变换后，

数列只剩1项，设为x，根据不变量，有$1+x=4053$，解得$x=4052$.

四、解答题

15. 改编自人教 A 版选必二 $P56$ 练习 11

解：(1) 当 $n\geqslant 2$ 时, $a_{n+1}=2S_n+2$, $a_n=2S_{n-1}+2$ 相减可得当 $n\geqslant 2$, $a_{n+1}-a_n=2a_n$. ……… 2 分

即 $a_{n+1}=3a_n$, $n\geqslant 2$. 因为 $\{a_n\}$ 是等比数列, $a_{n+1}=3a_n$, $n\in N^*$. ……… 3 分

当 $n=1$ 时， $a_2=2a_1+2=3a_1$, 可解得 $a_1=2$. …… 4 分

数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2\times 3^{n-1}$. …… 6 分

(2) $\because \dfrac{n}{2}a_n=n\cdot 3^{n-1}$ …… 7 分

$\therefore\ T_n=1\times 3^0+2\times 3^1+3\times 3^2+\cdots+(n-1)\times 3^{n-2}+n\times 3^{n-1}$， ① ………8 分

①×3 得 $3T_n=\quad 1\times 3^1+2\times 3^2+3\times 3^3+\cdots+(n-1)\times 3^{n-1}+n\times 3^n$， ② …… 9 分

由①-②得 $-2T_n=1\times 3^0+1\times 3^1+1\times 3^2+\cdots+1\times 3^{n-1}-n\times 3^n$, …… 10 分

即 $-2T_n=\dfrac{1\times(1-3^n)}{1-3}-n\times 3^n=(\dfrac{1}{2}-n)\times 3^n-\dfrac{1}{2}$, ………. 12 分

化简得 $T_n=(\dfrac{n}{2}-\dfrac{1}{4})\times 3^n+\dfrac{1}{4}$. ………. 13 分

16. 改编自 2007 年辽宁卷

证明：（1）设正方形边长为 a, 由已知得 $BM//DN$, 且 $BM=DN=\dfrac{a}{2}$,

所以四边形 $BMDN$ 为平行四边形. ……… 2 分

则 $DM//BN$, 由 $\begin{cases} DM//BN, \\ BN\not\subset 平面AMD, \\ DM\subset 平面AMD, \end{cases}$ 所以 $BN//$ 平面 AMD. …… 5 分

解：(2) 设正方形边长为 a, 则 $\triangle ACD$ 为边长为 a 的等边三角形,

由 N 为 DC 中点，得 $AN\perp CD$. ………7 分

又 $MN\perp CD$, $MN\cap AN=N$, 则 $CD\perp$ 平面 AMN. …… 9 分

由 $CD\subset$ 平面 $BMDC$, 则平面 $AMN\perp$ 平面 $BMDC$.

过 A 作 $AH\perp MN$ 于 H, 则 $AH\perp$ 平面 $BMDC$.

过 H 作 $HE\perp BC$ 于 E, 连接 AE，则 $AE\perp BC$,

从而 $\angle AEH$ 为二面角 $A-BC-D$ 的平面角. ……… 11 分

$\triangle AMN$ 中， $AM=\dfrac{a}{2}$, $AN=\dfrac{\sqrt{3}a}{2}$, $MN=a$, 易知 $\triangle AMN$ 为直角三角形.

由 $S_{\triangle AMN}=\dfrac{1}{2}AM\cdot AN=\dfrac{1}{2}AH\cdot MN$, 得 $AH=\dfrac{\sqrt{3}a}{4}$.

在矩形 $BCNM$ 中，易得 $HE=\dfrac{a}{2}$. 则 $Rt\triangle AHE$ 中，可求得 $AE=\dfrac{\sqrt{7}a}{4}$.

在 $Rt\triangle AHE$ 中， $cos\angle AEH=\dfrac{HE}{AE}=\dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{7}a}{4}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

所以平面 ABC 与平面 BCD 夹角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$. ………15 分

注：（2）也可建立空间直角坐标系求解.

17. 改编自 2025 年北京卷

解：(1) 由 $f'(x)=xe^{-x}$，得 $f''(x)=e^{-x}(1-x)$，　……… 2 分

当 $x\in(-\infty,1)$，$f''(x)>0$，则 $f'(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调递增；

当 $x\in(1,+\infty)$，$f''(x)<0$，则 $f'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减.　……… 4 分

所以 $f'(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，也即最大值，$f'(x)_{max}=f'(1)=\dfrac{1}{e}$.　……… 6 分

证明：(2) 点 $A(a,f(a)\,(a\neq 0)$ 处的切线 l 可表示为：$y-f(a)=f'(a)(x-a)$，　………8 分

构造函数 $h(x)=f(x)-[f(a)+f'(a)(x-a)]$，

则 $h'(x)=f'(x)-f'(a)$，$a<0$. 当 $a<0$ 时，$f'(a)=ae^{-a}<0$　……… 10 分

法一：由（1）可知当 $x\in(-\infty,0)$，$f'(x)<0$，当 $x\in(0,+\infty)$，$f'(x)>0$；

当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$f'(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调递增，当 $x\in(1,+\infty)$，$f'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递减；

(i) 当 $x<a<0$ 时，$f'(x)$ 单增，则 $f'(x)<f'(a)$，即 $h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 单调递减，则 $h(x)>h(a)=0$；

(ii) 当 $0>x>a$ 时，$f'(x)$ 单增，则 $f'(x)>f'(a)$，即 $h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(a,0)$ 单调递增，则 $h(x)>h(a)=0$；

(iii) 当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，则 $h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

$h(x)>h(0)>h(a)=0$；　……… 14 分

综上，除了切点 A，$h(x)>0$，即曲线 $y=f(x)$ 在直线 l 的上方.　……… 15 分

法二：因为函数 $h'(x)$ 与 $f'(x)$ 的单调性相同，

所以 $h'(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 单调递增，在 $(1,+\infty)$ 单调递减，且 $h'(a)=0$.　……… 9 分

当 $x\in(-\infty,a)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 单调递减；

当 $x\in(a,+\infty)$ 时，在 $x\to+\infty$ 时，$f'(x)\to 0$，则 $h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 单调递增.

且 $h(a)=0$. 即 $h(x)\geqslant 0$，当且仅当 $x=a$ 时，$h(x)=0$.

综上，除了切点 A，$h(x)>0$，即曲线 $y=f(x)$ 在直线 l 的上方.　……… 15 分

注：本题可先求出 $f(x)=c-(1+x)e^{-x}$(c 为常数），但并不需要.

18. 改编自湘教版教材选必一 $P173$ 习题 19

解：(1) 由题意知，$a=2$，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则 $c=\sqrt{3}$，$b^2=a^2-c^2=4-3=1$，

所以椭圆 C_1 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.　……… 3 分

(2) ①直线 l 的斜率不为 0，设 l 的方程为：$x=ty+\dfrac{2}{3}$，$C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$.

联立 $\begin{cases} x=ty+\dfrac{2}{3}, \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases}$ 可得 $9(t^2+4)y^2+12ty-32=0$，

由 $\Delta=144t^2+36(t^2+4)\times 32>0$.

则 $y_1+y_2=-\dfrac{4t}{3(t^2+4)}$，$y_1y_2=-\dfrac{32}{9(t^2+4)}$.　……… 6 分

由 D 在椭圆上，D' 在圆上，易知 $D'(x_2,2y_2)$，则 $\overrightarrow{AD'}=(x_2+2,2y_2)$，$\overrightarrow{BC}=(x_1-2,y_1)$.

$\because x_1=ty_1+\dfrac{2}{3}$，$x_2=ty_2+\dfrac{2}{3}$　……… 8 分

$\therefore 2y_2(x_1-2)-y_1(x_2+2)=2y_2(ty_1+\dfrac{2}{3}-2)-y_1(ty_2+\dfrac{2}{3}+2)=ty_1y_2-\dfrac{8}{3}(y_1+y_2)$

代入韦达定理得 $ty_1y_2-\frac{8}{3}(y_1+y_2)=t(-\frac{32}{9(t^2+4)})-\frac{8}{3}(-\frac{4t}{3(t^2+4)})=0$，

则 $\overrightarrow{AD'}//\overrightarrow{BC}$，从而 $AD'//BC$. ……… 11 分

②直线 AC 的方程为：$y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，直线 BD' 的方程为：$y=\frac{2y_2}{x_2-2}(x-2)$，

则 $\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)=\frac{2y_2}{x_2-2}(x-2)$，

$\therefore \frac{x_H+2}{x_H-2}=\frac{2y_2(x_1+2)}{y_1(x_2-2)}=\frac{2y_2(ty_1+\frac{2}{3}+2)}{y_1(ty_2+\frac{2}{3}-2)}=\frac{2y_2(ty_1+\frac{2}{3}+2)}{y_1(ty_2+\frac{2}{3}-2)}=\frac{2ty_1y_2+\frac{16}{3}y_2}{ty_1y_2-\frac{4}{3}y_1}$ ……… 13 分

由①中韦达定理可知 $ty_1y_2=\frac{8(y_1+y_2)}{3}$，代入可得：

$$\frac{2ty_1y_2+\frac{16}{3}y_2}{ty_1y_2-\frac{4}{3}y_1}=\frac{\frac{16}{3}(y_1+y_2)+\frac{16}{3}y_2}{\frac{8}{3}(y_1+y_2)-\frac{4}{3}y_1}=\frac{\frac{16}{3}y_1+\frac{32}{3}y_2}{\frac{4}{3}y_1+\frac{8}{3}y_2}=4,$$

即 $\frac{x_H+2}{x_H-2}=4$，可解得 $x_H=\frac{10}{3}$. ……… 15 分

由题意，可设 $H(\frac{10}{3},m)$，则 $\overrightarrow{OH}=(\frac{10}{3},m)$，又 $\overrightarrow{OE}=(\frac{2}{3},0)$，从而 $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OH}=\frac{20}{9}$.

所以，$\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OH}$ 为定值 $\frac{20}{9}$. ……… 17 分

19. 解：(1) 当 $k=4$，$j=3$ 时，a_1,a_2,a_3,a_4 是 4 个正整数，M 是这 4 个正整数中任取其中 3 个数的和构成的集合，且集合 M 恰好有 4 个数.

由条件可知，a_1,a_2,a_3,a_4 这 4 个正整数互不相同. ……… 2 分

令 $S=a_1+a_2+a_3+a_4$，$S_i=S-a_i$，

则 $7+9+11+12=3S$，$S=13$. 即 $a_1+a_2+a_3+a_4=13$. ……… 4 分

(2) 当 $k=9$，$j=8$ 时，$a_1,a_2,\cdots,a_9$ 是 9 个正整数，M 是这 9 个正整数中任取其中 8 个数的和构成的集合，且集合 M 只有 7 个数. 由条件可知，$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_9$ 这 9 个正整数中必有 2 个数或者 1 个数重复. ………6 分

令 $S=a_1+a_2+\cdots+a_9$，$S_i=S-a_i$，

则 $81+83+85+\cdots+92=8S+m+t$，其中 $m,t\in M$.

整理可得 $S=\frac{604+m+t}{8}=75+\frac{4+m+t}{8}$，由 S 是整数，$\frac{4+m+t}{8}$ 必为整数. ……… 8 分

①当 $m,t=\{81,83\}$，满足 $\frac{4+m+t}{8}$ 为整数，所以 $S=96$,

所以, $a_1,a_2,\cdots,a_8$ 中最大的数为: $96-81=15$, 最小数为 $96-92=4$,

所以它们的和为 19. ……… 9 分

②当 $m,t=\{89,83\}$ 或者 $\{86\}$，满足 $\frac{4+m+t}{8}$ 为整数，所以 $S=97$,

所以, $a_1,a_2,\cdots,a_8$ 中最大的数为: $97-81=16$, 最小数为 $97-92=5$,

所以它们的和为 21. ……… 10 分

③当 $m,t=\{92,88\}$，满足 $\frac{4+m+t}{8}$ 为整数，所以 $S=98$,

所以, $a_1,a_2,\cdots,a_8$ 中最大的数为: $98-81=17$, 最小数为 $98-92=6$,

所以它们的和为 23. ……… 11 分

综上，$a_1,a_2,\cdots,a_9$ 中的最大数与最小数的和所有可能的集合为 $\{19,21,23\}$. ……… 12 分

(3) 当 $k=2n$，$j=2n-1$ 时，记 $S=\sum_{i=1}^{2n}a_i=n(2n+1)$， ……… 13 分

且 $M=\{S-a_i|i=1,2,\cdots 2n\}=\{S-1,S-2,\cdots,S-2n\}$ ……… 14 分

从集合 M 中随机取出 n 个不同的数（等可能），记取出的数中最小值为 X.

则 $X=S-(a_i)_{max}$，

记 Y 是从 $\{1,2,\cdots 2n\}$ 中均匀随机选取的 n 的元素的最大值.

共有 C_{2n}^n 种取法，$P(Y=k)=\dfrac{C_{k-1}^{n-1}}{C_{2n}^n}$. ……… 15 分

$E(Y)=\sum_{k=n}^{2n}kP(Y=k)=\dfrac{1}{C_{2n}^n}\sum_{k=n}^{2n}kC_{k-1}^{n-1}$，又 $nC_k^n=kC_{k-1}^{n-1}$，

$E(Y)=\dfrac{1}{C_{2n}^n}\sum_{k=n}^{2n}nC_k^n=\dfrac{n}{C_{2n}^n}\sum_{k=n}^{2n}C_k^n$，

方法一：$\sum_{k=n}^{2n}C_k^n=C_n^n+C_{n+1}^n+\cdots+C_{2n}^n=C_{n+1}^{n+1}+C_{n+1}^n+\cdots+C_{2n}^n=C_{n+2}^{n+1}+C_{n+2}^n+\cdots+C_{2n}^n=C_{2n+1}^{n+1}$.

方法二：C_{2n+1}^{n+1} 可理解为从 $2n+1$ 个不同的元素里选出 $n+1$ 个元素的总的方案数.

$C_n^n+C_{n+1}^n+\cdots+C_{2n}^n$ 可理解为按选出的 $n+1$ 个元素里最大的那个元素来分类计算：

若最大元素是第 $n+1$ 个，则剩下的 n 个元素要从前面 n 个里选：C_n^n；

若最大元素是第 $n+2$ 个，则剩下的 n 个元素要从前面 $n+1$ 个里选：C_{n+1}^n；

…………

若最大元素是第 $2n+1$ 个，则剩下的 n 个元素要从前面 $2n$ 个里选：C_{2n}^n；

所有情况加在一起，即 $C_n^n+C_{n+1}^n+\cdots+C_{2n}^n=C_{2n+1}^{n+1}$ 成立.

即 $E(Y)=\dfrac{n}{n+1}(2n+1)$.

而 $E(X)=S-E(Y)=n(2n+1)-\dfrac{n}{n+1}(2n+1)=\dfrac{n^2}{n+1}(2n+1)$. ……… 17 分

热身考试大礼包

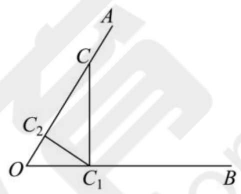
预祝同学们一切顺利！高考大捷！

7．圆与椭圆有密切联系，将圆在同一方向等比例“压缩”或者“拉伸”，圆会变形为椭圆；同样的，将椭圆在同一方向等比例“压缩”或者“拉伸”，椭圆会变形为不同的椭圆或圆．已知二面角$\alpha-l-\beta$的大小为60°，半平面α内的圆C在半平面β上的正投影是椭圆C_1,C_1在半平面α上的正投影是椭圆C_2，则椭圆C_2的离心率为（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{15}}{4}$　　C．$\dfrac{\sqrt{7}}{4}$　　D．$\dfrac{1}{4}$

7.答案 B　解析：不妨设圆C与l切于点O，过O作与l垂直的平面分别交半平面α，β于射线OA，OB（如图）.设圆的半径为$r\left(r>0\right)$，椭圆C_1，C_2的中心分别为C_1，C_2，长短半轴分别为a_1，b_1，a_2，b_2，

则$a_1=a_2=r$，$b_1=OC_1$，$b_2=OC_2$，而$\angle AOB=60^{\circ}$，

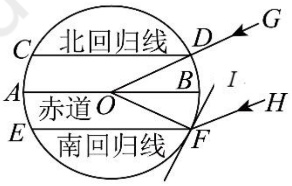


由平面几何知识易得，$b_2=b_1\cdot\cos 60^{\circ}=\dfrac{1}{2}b_1=\dfrac{1}{2}\cdot OC\cdot\cos 60^{\circ}=\dfrac{1}{4}r$

故椭圆C_2的离心率$e_2=\sqrt{\dfrac{a_2^2-b_2^2}{a_2^2}}=\sqrt{\dfrac{r^2-\frac{1}{16}r^2}{r^2}}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

12．如图，$\odot O$是地球的示意图，其中AB表示赤道，CD，EF分别表示北回归线和南回归线，$\angle DOB=\angle FOB=23.5^{\circ}$.夏至日正午时，太阳光线$GD$所在直线经过地心$O$，此时点$F$处的太阳高度角$\angle IFH$(即平行于$GD$的光线$HF$与$\odot O$的切线$FI$所成的锐角)的大小为___°.

12．答案:43　解析$\because\angle DOB=\angle FOB=23.5^{\circ}$，



$\therefore\angle DOF=\angle DOB+\angle FOB=47^{\circ}$，

$\because GD//HF$，$\therefore\angle OFH=180^{\circ}-\angle DOF=180^{\circ}-47^{\circ}=133^{\circ}$，

$\because FI$是$\odot O$的切线，

$\therefore OF\perp FI$，则$\angle OFI=90^{\circ}$，

则$\angle IFH=133^{\circ}-90^{\circ}=43^{\circ}$.

8．已知实数a,b满足$a^2-b+\log_2 a=2\log_{\sqrt{2}}b$，则$a,b$的大小关系不可能是（　　）

A．$a<b<1$　　B．$b<a<1$　　C．$1<a<b$　　D．$1<b<a$

答案 B　解析：（法 1.同构法）由 已知变形得: $a^2+\log_2 a=b+4\log_2 b=b+\log_2 b^4$，

令$g(x)=x^2+\log_2 x(x>0)$，函数单调递增.

令$b=\dfrac{1}{2}$时，$a^2+\log_2 a=\dfrac{1}{2}-4=-\dfrac{7}{2}<(\dfrac{1}{4})^2+\log_2\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{16}-2$,

$\therefore$ $a<\dfrac{1}{4}<b<1$，　所以 A 对.

令$b=2$时，$a^2+\log_2 a=2+4=6>2^2+\log_2 2=5$,$\therefore$ $a>2=b>1$，所以 D 对.

令$b=4$时，$a^2+\log_2 a=4+8=12<4^2+\log_2 4=18$,$\therefore$ $1<a<4=b$，所以 C 对.

（法 2.图象法）解析:由已知变形得: $a^2+\log_2 a=b+4\log_2 b$

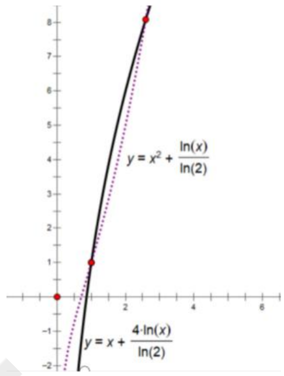
令$f\left(x\right)=x^2+\log_2 x-x-4\log_2 x=x^2-x-3\log_2 x$，

则$f'\left(x\right)=2x-1-\dfrac{3}{x\ln 2}$，令$g\left(x\right)=2x-1-\dfrac{3}{x\ln 2}$，则$g'\left(x\right)=2+\dfrac{3}{x^2\ln 2}>0$，所以$f'\left(x\right)$单调递增，对于选项$A,B$，当$x\in\left(0,1\right)$时，

$f'\left(x\right)<f'\left(1\right)=1-\dfrac{3}{\ln 2}<0$，所以$f\left(x\right)$在$\left(0,1\right)$单调递减，

所以$f\left(x\right)>f\left(1\right)=0$，即函数$y=x^2+\log_2 x$始终在函数$y=x+4\log_2 x$上方，

如图所示.若 $a^2+\log_2 a=b+4\log_2 b$，则 $a<b<1$，A 正确，B 错误；



对于选项 C,D，因为 $f'(1)<0$，$f'(2)=3-\frac{3}{2\ln 2}>0$，且 $f'(x)$ 单调递增，

所以 $\exists x_0\in(1,2)$，$f'(x_0)=0$，

且 $x\in(1,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，$x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(1,x_0)$ 单调递减，又 $f(1)=0$，所以 $f(x)<0$ 在 $(1,x_0)$ 恒成立，

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调递增，

因为 $f(2)=4-2-3=-1<0$，$f(3)=9-3-3\log_2 3>9-3-6=0$,

所以 $\exists x_1\in(2,3)$，$f(x_1)=0$，

所以 $x\in(1,x_1)$ 时，$f(x)<0$ 恒成立；$x\in(x_1,+\infty)$ 时，$f(x)>0$ 恒成立，

即 $x\in(1,x_1)$ 时，函数 $y=x^2+\log_2 x$ 始终在函数 $y=x+4\log_2 x$ 下方；

$x\in(x_1,+\infty)$ 时，函数 $y=x^2+\log_2 x$ 始终在函数 $y=x+4\log_2 x$ 上方.如图，

若 $a^2+\log_2 a=b+4\log_2 b$，则 $1<a<b$，或 $1<b<a$，C,D 正确；

10．抛物线有如下光学性质：由其焦点射出的光线经抛物线反射后，沿平行于抛物线对称轴的方向射出；反之，平行于抛物线对称轴的入射光线经抛物线反射后必过抛物线的焦点.已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$，O 为坐标原点，一条平行于 x 轴的光线 l_1 从抛物线内的点 P（P 不在 x 轴上）射入，经过 C 上的点 A 反射，再经 C 上另一点 B 反射后，沿直线 l_2 射出并经过点 Q，则（　　）

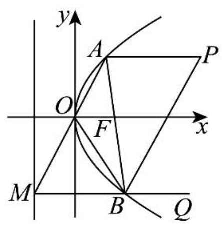
A．若 $P\left(\frac{41}{4},4\right),p=4$，则 $S_{\triangle AOB}=8$

B．若 $P\left(\frac{41}{4},4\right),p=2$，则 PB 平分 $\angle ABQ$

C．若 $p=4$，延长 AO 交直线 $x=-2$ 于点 M，则 M,B,Q 三点共线

D．若 $p=2$，过 B 作 x 轴的平行线交抛物线的准线于点 $N,S_{\triangle OBA}=3S_{\triangle OBN}$，则直线 AB 的斜率 $k=\sqrt{2}$

答案 ABC　　解析：作出示意图，如图所示.



对 A，若 $p=4$，则 $C:y^2=8x$，又点 $P\left(\frac{41}{4},4\right)$，所以 $A(2,4)$.易知 C 的焦点 $F(2,0)$，

所以 $AB\perp x$ 轴，则 $|AB|=2p=8$，所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|OF||AB|=\frac{1}{2}\times2\times8=8$，故 A 正确.

对 B，若 $p=2$，则 $C:y^2=4x$，又点 $P\left(\frac{41}{4},4\right)$，所以 $A(4,4)$，易知 $x_Ax_B=\frac{2^2}{4}=1$，

所以 $x_B=\frac{1}{4}$，$|AB|=x_A+x_B+p=4+\frac{1}{4}+2=\frac{25}{4}$，则 $|AP|=\frac{41}{4}-4=\frac{25}{4}=|AB|$.

所以 $\angle APB=\angle ABP$，又 $\angle APB=\angle PBQ$，所以 $\angle ABP=\angle PBQ$，

即 PB 平分 $\angle ABQ$，B 正确.

对 C，若 $p=4$，延长 AO 交直线 $x=-2$ 于点 M，则 $k_{OA}=k_{OM}$，即 $\frac{y_A}{x_A}=\frac{y_M}{x_M}=\frac{y_M}{-2}$，

则 $y_M=\frac{-16}{y_A}$，易知 $y_Ay_B=-p^2=-16$，则 $y_B=\frac{-16}{y_A}$，所以 $y_B=y_M$，

则 M,B,Q 三点共线，故 C 正确.

对 D，易知 A,O,N 三点共线，设 $A(x_1,y_1)(y_1>0),B(x_2,y_2)$，则 $y_1y_2=-p^2=-4$.

因为 $S_{\triangle OBA}=3S_{\triangle OBN}$，所以 $|OA|=3|ON|$，所以 $y_1=-3y_2$.由 $y_1y_2=-\frac{y_1^2}{3}=-4, y_1>0$，

得 $y_1=2\sqrt{3}$，则 $A\left(3,2\sqrt{3}\right)$，又焦点 $F\left(1,0\right)$，所以 $k=k_{AF}=\frac{2\sqrt{3}-0}{3-1}=\sqrt{3}$，故 D 不正确.

速解：对于 A，$S_{\triangle AOB}=\frac{p^2}{2\sin\alpha}=\frac{4^2}{2\sin 90^\circ}=8$($\alpha$ 是直线 AB 的倾斜角)，故 A 正确.

对于 C，设抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，经过点 F 的直线交抛物线于 A,B 两点，O 为坐标原点，直线 AO 交准线于点 M，则 $BM/\!/x$ 轴.反之亦成立.故 C 正确.

15.（本小题满分 13 分）

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $a_{n+1}=2S_n+2(n\in N^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 定义数列 $b_n=a_1C_n^0-a_2C_n^1+a_3C_n^2-a_4C_n^3+\cdots+(-1)^n a_{n+1}C_n^n$，$n\in N^*$. 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

(3) 定义数列 $b_n=3a_n-2$，求证 $\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}<\frac{1}{2}$.

15. 改编自人教 A 版选必二 $P56$ 练习 11

解：$(2)b_n=a_1C_n^0-a_2C_n^1+a_3C_n^2-a_4C_n^3+\cdots+(-1)^n a_{n+1}C_n^n$

$=a_1[C_n^0-qC_n^1+q^2C_n^2-q^3C_n^3+\cdots+(-1)^n q^nC_n^n]=a_1(1-q)^n$， ……… 9 分

又 $a_1=2$，$q=3$，即 $b_n=2\cdot(-2)^n$， ……… 11 分

$T_n=2\cdot\frac{(-2)\cdot[1-(-2)^n]}{1-(-2)}=\frac{4}{3}[(-2)^n-1]$. ……… 13 分

注：也可使用数学归纳法，先猜后证.

$(3)b_n=2\times3^n-2$， ……… 7 分

$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}=\frac{1}{2}(\frac{1}{3^1-1}+\frac{1}{3^2-1}+\cdots\frac{1}{3^n-1})$ ……… 8 分

方法一：$\frac{1}{2}(\frac{1}{3^1-1}+\frac{1}{3^2-1}+\cdots+\frac{1}{3^n-1})<\frac{1}{2}(\frac{2}{3^1}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{2}{3^n})=\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}$，

即 $\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}<\frac{1}{3^1}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}=\frac{\frac{1}{3}[1-(\frac{1}{3})^n]}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}[1-(\frac{1}{3})^n]<\frac{1}{2}$ ……… 13 分

方法二：$3^n-1=2\times3^{n-1}+3^{n-1}-1\geqslant2\times3^{n-1}$，

所以 $\frac{1}{b_n}=\frac{1}{2\times(3^n-1)}\leqslant\frac{1}{4\times3^{n-1}}$，

$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}<\frac{1}{4}(\frac{1}{3^0}+\frac{1}{3^1}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}})=\frac{1}{4}[\frac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}}]=\frac{3}{8}[1-(\frac{1}{3})^n]<\frac{3}{8}<\frac{1}{2}$. 13 分

17. 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 R，且 $f(0)=0$，导函数 $f'(x)=xe^{-x}$，设 l_1 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $A(a,f(a)\,(a\neq0)$ 处的切线.

(1) 求 $f'(x)$ 的最大值；

(2) 当 $a<0$ 时，证明：除切点 A 外，曲线 $y=f(x)$ 在直线 l_1 的上方；

(3) 若 $a>0$，设过点 A 的直线 l_2 与直线 l_1 垂直，l_1，l_2 与 x 轴交点的横坐标分别是 x_1、x_2. 求 $\frac{2a-x_1-x_2}{x_2-x_1}$ 的取值范围.

(3) 易知 $f(a)\neq0$，$f'(a)\neq0$.

由（2）可知，$l_1: y-f(a)=f'(a)(x-a)$，令 $y=0$，$x_1=-\frac{f(a)}{f'(a)}+a$； ……… 11 分

$l_2: y-f(a)=\frac{-1}{f'(a)}(x-a)$，令 $y=0$，$x_2=f(a)f'(a)+a$； ……… 12 分

代入 $\dfrac{2a-x_1-x_2}{x_2-x_1}=\dfrac{2a+\frac{f(a)}{f'(a)}-a-f(a)f'(a)-a}{f(a)f'(a)+\frac{f(a)}{f'(a)}}=\dfrac{\frac{1}{f'(a)}-f'(a)}{\frac{1}{f'(a)}+f'(a)}=\dfrac{1-[f'(a)]^2}{1+[f'(a)]^2}$

$=-1+\dfrac{2}{1+[f'(a)]^2}$ ，　　……… 13 分

由（1）可知当 $a>0$，$f'(a)\in(0,\dfrac{1}{e}]$，所以 $[f'(a)]^2\in(0,\dfrac{1}{e^2}]$，$\dfrac{2}{1+[f'(a)]^2}\in[\dfrac{2e^2}{e^2+1},2)$，

则 $\dfrac{2a-x_1-x_2}{x_2-x_1}\in[\dfrac{e^2-1}{e^2+1},1)$.

所以 $\dfrac{2a-x_1-x_2}{x_2-x_1}$ 的取值范围是 $[\dfrac{e^2-1}{e^2+1},1)$.　　……… 15 分