绵阳中学 2023 级高考适应性考试（一）

数学答案

一、单选题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	C	A	B	B	A	D	D

二、多选题

题号	9	10	11
答案	AC	BD	ABD

三、填空题

12：8　　13：$(\frac{1}{8},+\infty)$　　14：$\frac{\pi}{3}$；$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

四、解答题

15．解：（1）根据 $\sin B=2\sin C$，由正弦定理得 $b=2c$，

因为 $\angle BAC=120°$，$\angle BAC$ 的角平分线交 BC 于点 D，所以 $\angle BAD=\angle CAD=60°$，

由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADB}+S_{\triangle CDA}$，可得 $\frac{1}{2}bc\sin\angle BAC=\frac{1}{2}c\cdot AD\sin\angle BAD+\frac{1}{2}b\cdot AD\sin\angle CAD$，

即 $\frac{1}{2}\times 2b\sin 60°+\frac{1}{2}\times 2c\sin 60°=\frac{1}{2}bc\sin 120°$，化简得 $bc=2c+2b$，解得 $b=6$，$c=3$，

在△ ABC 中，由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos 120°=36+9-2\times 3\times 6\times(-\frac{1}{2})=63$，

所以 $a=\sqrt{63}=3\sqrt{7}$（舍负）；

（2）由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADB}+S_{\triangle CDA}$，得 $\frac{1}{2}bc\sin\angle BAC=\frac{1}{2}c\cdot AD\sin\angle BAD+\frac{1}{2}b\cdot AD\sin\angle CAD$，

即 $\frac{1}{2}\times 2b\sin 60°+\frac{1}{2}\times 2c\sin 60°=\frac{1}{2}bc\sin 120°$，化简得 $bc=2b+2c$，

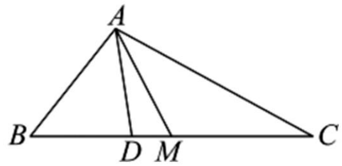
根据 $2b+2c\geq 2\sqrt{4bc}=4\sqrt{bc}$，可得 $bc\geq 4\sqrt{bc}$，解得 $bc\geqslant 16$，

当且仅当 $b=c=4$ 时等号成立，

当 bc 取得最小值时，△ ABC 的面积取得最小值，

此时△ ABC 为等腰三角形，M 为 BC 中点，

即 AM 既是中线也是角平分线，可得 D、M 重合，故 $AM=AD=2$．



16．解：（1）由已知得：$g(x)=f'(x)=\sin x+x\cos x-a\sin x$，所以 $g'(x)=2\cos x-x\sin x-a\cos x$，

因为 $x=\pi$ 是函数 $g(x)$ 的极小值点，所以 $g'(\pi)=-2+a=0$，解得 $a=2$，

当 $a=2$ 时，$g'(x)=-x\sin x$，$g'(x)<0\Rightarrow(0，\pi)$，$g'(x)>0\Rightarrow(\pi，2\pi)$，符合题意，故 $a=2$．

（2）因为 $f(x)=x\sin x+2\cos x$ 为偶函数，故只需研究 $x\in[0，2\pi)$ 的情形，

由（1）知 $g(x)=x\cos x-\sin x$，$g'(x)=-x\sin x$，$g'(x)<0\Rightarrow x\in(0，\pi)$，$f'(x)$ 单调递减；

$g'(x)>0\Rightarrow x\in(\pi，2\pi)$，$f'(x)$ 单调递增，因为 $f'(0)=0$，$f'(\pi)=-\pi$，$f'(2\pi)=2\pi$，

所以存在 $x_1\in(\pi,2\pi)$，使得 $f'(x_1)=0$；

当 $x\in(0,x_1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_1，2\pi)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

因为 $f(0)=2$，$f(\pi)<0$，$f(2\pi)>0$，故存在 $x_2\in(0,\pi)$，$x_3\in(\pi,2\pi)$，使得 $f(x_2)=f(x_3)=0$；

由对称性可知，函数 $f(x)$ 在区间 $(-2\pi,2\pi)$ 内的零点个数为 4.

17．解：（1）根据频率分布直方图的性质，所有组频率和为1，组距为10，

因此：$10\times(0.005+0.005+0.010+0.020+0.020+a+0.010+0.005)=1$，解得：$a=0.025$

下四分位数即第25百分位数，计算累计频率

$[70,80)$ 频率 0.05，累计 0.05；$[80,90)$ 频率 0.05，累计 0.1；

$[90,100)$ 频率 0.1，累计 0.2；$[100,110)$ 频率 0.2，累计 0.4。

$0.25\in(0.2,0.4)$，因此第25百分位数在区间 $[100,110)$ 内，

计算得：下四分位数 $=100+10\times\dfrac{0.25-0.2}{0.2}=102.5$

（2）零假设 H_0：认真完成作业与成绩无关

	认真完成作业	不认真完成作业
成绩优秀	40	10
成绩不优秀	60	90

$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\dfrac{200\times(40\times90-10\times60)^2}{50\times150\times100\times100}=24$，因为 $24>10.828=x_{0.001}$，

依据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，零假设 H_0 不成立，即认真完成作业与成绩有关，

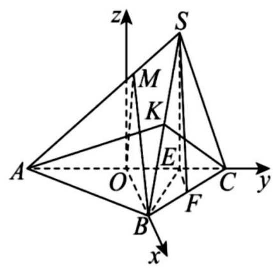
该判断出错概率不超过 0.001，

18．解：（1）证明：取 AC 的中点 O，连接 OB，EF，因为 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，$\angle B=90°,AB=BC=4\sqrt{2}$，所以 $OB\perp AC$，$AC=8$，由 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$，得 $AE=6$，$EC=2$，

则 E 为 OC 的中点，又 F 为 BC 的中点，所以 $EF//OB$，$EF\perp AC$，又 $DE\perp AC$，则 $SE\perp AC$，因为 $SE\bigcap EF=E$，SE，$EF\subset$ 平面 SEF，所以 $AC\perp$ 平面 SEF，又 $FS\subset$ 平面 SEF，所以 $FS\perp AC$．

（2）由（1）知，$AC\perp$ 平面 SEF，而 $BG\perp AC$，则点 G 必定在平面 SEF 的平行平面内，取点 M，使得 $\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AS}$，连接 OM，BM，因为 $AO=\dfrac{2}{3}AE$，则 $OM//SE$，因为 $OM\not\subset$ 平面 SEF，$SE\subset$ 平面 SEF，所以 $OM//$ 平面 SEF，又 $EF//OB$，$EF\subset$ 平面 SEF，$OB\not\subset$ 平面 SEF，所以 $OB//$ 平面 SEF，因为 $OM\bigcap OB$，OM，$OB\subset$ 平面 MOB，所以平面 $MOB//$ 平面 SEF，因此点 G 的轨迹为线段 OB，OM，MB（不包括点 B）组成，因为 $BC=4\sqrt{2}$，$SB=2\sqrt{13}$，$SE=4$，$EC=2$，则 $SC=2\sqrt{5}$，所以 $SC^2+BC^2=SB^2$，则 $SC\perp BC$，而 $OB=\dfrac{1}{2}AC=4,MO=\dfrac{2}{3}SE=\dfrac{8}{3}$，

以 O 为原点，以 OB，OC 所在直线为 x，y 轴，以垂直于平面 ABC 的直线为 z 轴，建立空间直角坐标系，则 $A(0,-4,0)$，$C(0,4,0)$，$B(4,0,0)$，$E(0,2,0)$，$S(-4\cos\theta,2,4\sin\theta)$，其中 θ 为平面 DAC 绕直线 AC 向上旋转至平面 SAC 的旋转角，



则 $\overrightarrow{SC}=(4\cos\theta,2,-4\sin\theta),\overrightarrow{CB}=(4,-4,0),\overrightarrow{AB}=(4,4,0)$，因为 $SC\perp BC$，

所以 $\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{CB}=16\cos\theta-8=0$，则 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，即 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，则 $S(-2,2,2\sqrt{3})$，

所以 $\overrightarrow{AS}=(-2,6,2\sqrt{3})$，则 $\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AS}=(-\dfrac{4}{3},4,\dfrac{4\sqrt{3}}{3})$，

所以 $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}=(\dfrac{16}{3},0,-\dfrac{4\sqrt{3}}{3})$，则 $|\overrightarrow{MB}|=\sqrt{(\dfrac{16}{3})^2+(-\dfrac{4\sqrt{3}}{3})^2}=\dfrac{4\sqrt{19}}{3}$，

则点 G 的轨迹长度为 $OB+MO+MB=4+\dfrac{8}{3}+\dfrac{4\sqrt{19}}{3}=\dfrac{20+4\sqrt{19}}{3}$．

（3）由（2）及题意知，$S(-4\cos\theta,2,4\sin\theta)$，且平面 DAC 绕直线 AC 向上旋转至平面 SAC 时 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，则 $0<\theta\le\dfrac{\pi}{3}$，而 $B(4,0,0)$，则 $K(2-2\cos\theta,1,2\sin\theta)$，

而 $\overrightarrow{AC}=(0,8,0),\overrightarrow{AK}=(2-2\cos\theta,5,2\sin\theta),\overrightarrow{ES}=(-4\cos\theta,0,4\sin\theta),\overrightarrow{EB}=(4,-2,0)$，

设平面 AKC 的一个法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{m}\perp\overrightarrow{AC}\\ \vec{m}\perp\overrightarrow{AK}\end{cases}$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{AC}=8y=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{AK}=(2-2\cos\theta)x+5y+(2\sin\theta)z=0\end{cases}$，取 $x=\sin\theta$，得 $\vec{m}=(\sin\theta,0,-1+\cos\theta)$，

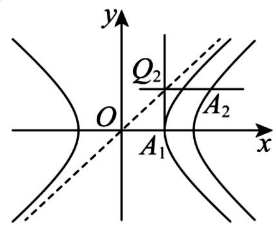
设平面 SEB 的一个法向量为 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，则 $\begin{cases}\vec{m}\perp\overrightarrow{ES}\\ \vec{m}\perp\overrightarrow{EB}\end{cases}$，则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{ES}=(-4\cos\theta)x_1+(4\sin\theta)z_1=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{EB}=4x_1-2y_1=0\end{cases}$，

取 $x_1=\sin\theta$，得 $\vec{n}=(\sin\theta,2\sin\theta,\cos\theta)$，设平面 AKC 与平面 SEB 所成角为 φ，

则 $\cos\varphi=|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{|sin^2\theta+\cos\theta(-1+\cos\theta)|}{\sqrt{sin^2\theta+(-1+\cos\theta)^2}\cdot\sqrt{sin^2\theta+4sin^2\theta+cos^2\theta}}$

$=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sqrt{2-2\cos\theta}\cdot\sqrt{5-4cos^2\theta}}=\dfrac{\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5-4cos^2\theta}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{5-4cos^2\theta}}$，令 $t=1-\cos\theta$，$0<t\le\dfrac{1}{2}$，

则 $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{t}{5-4(1-t)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{t}{1-4t^2+8t}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{\frac{1}{t}-4t+8}}$，因为函数 $y=\dfrac{1}{t}-4t$ 在 $(0,\dfrac{1}{2}]$ 上单调递减，则 $\dfrac{1}{t}-4t\ge 0$，即 $\dfrac{1}{t}-4t+8\ge 8$，则 $0<\dfrac{1}{\frac{1}{t}-4t+8}\le\dfrac{1}{8}$，所以 $0<\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{\frac{1}{t}-4t+8}}\le\dfrac{1}{4}$，则平面 AKC 与平面 SEB 所成角的余弦值的取值范围为 $(0,\dfrac{1}{4}]$.



19.解：（1）由题意，双曲线 E_n 的第一象限渐近线为 $y=x$，

当 $n=1$ 时，双曲线 $E_1:x^2-y^2=1$ 的右顶点为 $A_1(1,0)$，

过点 A_1 作 x 轴的垂线，交渐近线 $y=x$ 于点 Q_2，故 $Q_2(1,1)$，

再过点 Q_2 作 x 轴的平行线，与双曲线 $E_2:x^2-y^2=2$ 的右支交于点 A_2；

故点 A_2 的纵坐标为 $y_2=1$，代入双曲线方程，得 $x_2^2-1=2$，所以 $x_2^2=3$，

因为点 A_2 在右支上，所以 $x_2>0$，故 $x_2=\sqrt{3}$，因此 $A_2(\sqrt{3},1)$；

（2）由构造知，过点 $A_{n-1}(x_{n-1}，y_{n-1})$ 作 x 轴的垂线，与渐近线 $y=x$ 交于点 Q_n，所以 $Q_n(x_{n-1}，x_{n-1})$，

再过点 Q_n 作 x 轴的平行线与双曲线 E_n 的右支交于点 A_n，故 $y_n=x_{n-1}$，

又因为点 A_n 在双曲线 $E_n:x^2-y^2=n$ 上，所以 $x_n^2-y_n^2=n$，

代入 $y_n=x_{n-1}$，得 $x_n^2-x_{n-1}^2=n$，于是 $x_n^2=x_{n-1}^2+n$，

由 $x_1=1$，递推可得 $x_n^2=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，所以 $x_n=\sqrt{\dfrac{n(n+1)}{2}}$，

又 $y_n=x_{n-1}=\sqrt{\dfrac{n(n-1)}{2}}$，故 $A_n(\sqrt{\dfrac{n(n+1)}{2}},\sqrt{\dfrac{n(n-1)}{2}})$，

对于双曲线 $E_n:x^2-y^2=n$，有 $a^2=n$，$b^2=n$，从而 $c^2=a^2+b^2=2n$，

所以左、右焦点分别为 $F_n(-\sqrt{2n},0)$，$G_n(\sqrt{2n},0)$，

于是 $\overrightarrow{A_nF_n}=(-\sqrt{2n}-x_n,-y_n)$，$\overrightarrow{A_nG_n}=(\sqrt{2n}-x_n,-y_n)$，

因此 $a_n=\overrightarrow{A_nF_n}\cdot\overrightarrow{A_nG_n}=(-\sqrt{2n}-x_n)(\sqrt{2n}-x_n)+y_n^2=x_n^2+y_n^2-2n$，

由 $x_n^2=\dfrac{n(n+1)}{2},y_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$，得 $x_n^2+y_n^2=n^2$，所以 $a_n=n^2-2n=n(n-2)$，

于是$\sum_{n=3}^{20}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=3}^{20}\frac{1}{n(n-2)}=\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{20}(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n})=\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{19}-\frac{1}{20})=\frac{531}{760}$，

故所求值为$\frac{531}{760}$；

（3）由第（2）问可知$A_n(\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}},\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}})$，

因为a_n为射线OA_n与x轴正半轴的夹角，所以$\sin\alpha_n=\frac{y_n}{\sqrt{x_n^2+y_n^2}}$，

又由第（2）问知$x_n^2+y_n^2=n^2$，故$\sin\alpha_n=\frac{1}{n}\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}=\sqrt{\frac{n-1}{2n}}$，

于是$\sqrt{2}\sin\alpha_n=\sqrt{\frac{n-1}{n}}$，因为$n\geqslant 2$，所以$\sqrt{\frac{n-1}{n}}\geq\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，且当$n=2$时取等号，

所以原条件等价于存在实数φ，使得对任意$m\in N^*$，都有$\cos(\frac{m\theta}{4}+\varphi)<\frac{\sqrt{2}}{2}$，

设$\delta=\frac{\theta}{4}>0$，则上式化为对任意$m\in N^*$，都有$\cos(m\delta+\varphi)<\frac{\sqrt{2}}{2}$，

由三角函数性质可知$\cos x<\frac{\sqrt{2}}{2}$，当且仅当$m\delta+\varphi(mod 2\pi)\in(\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4})$，

设$\frac{\delta}{2\pi}=\frac{p}{q}$，$(p,q)=1$，则$m\delta+\varphi(mod 2\pi)$只取$q$个等分点：

φ，$\varphi+\frac{2\pi}{q}$，$\varphi+\frac{4\pi}{q}$，…，$\varphi+\frac{(2q-1)\pi}{q}$，这些点都要落在开弧$(\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{4})$，

该开弧长度为$\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$，

若q个等分点能全部落在长度$\frac{3\pi}{2}$的开弧中，

必须有$2\pi-\frac{2\pi}{q}<\frac{3}{2}\pi\Rightarrow\frac{2\pi}{q}>\frac{\pi}{2}\Rightarrow q<4$，故$q\leqslant 3$，

若$\frac{\delta}{2\pi}$不是有理数，则$m\delta+\varphi(mod 2\pi)$后的点会进闭弧$[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$，不合条件，

因此必有$q\leqslant 3$，为了使最小，取$q=3$，$p=1$．此时$\delta=\frac{2\pi}{3}$，

当$\delta=\frac{2\pi}{3}$，$\varphi=-\frac{\pi}{3}$时，有$m\delta+\varphi=-\frac{\pi}{3}+\frac{2m\pi}{3}$，

当$m=1$，2，$0(mod 3)$时，分别为$\frac{\pi}{3}$，$\pi,\frac{5\pi}{3}$，对应余弦值分别为$\frac{1}{2}$，-1，$\frac{1}{2}$均小于$\frac{\sqrt{2}}{2}$，

因此，θ的最小值为$4\delta=\frac{8\pi}{3}$．