数学参考答案

双向细目表

内容模块	具体内容	题型	题号	分值	难度预估	预估分	能力层次			
							了解	理解	掌握	权重比例
函数与导数	函数的对称性与周期性	选择题	6	5	0.7	3.5		√		25.33%
	不等式恒成立问题	选择题	8	5	0.4	2			√	
	三次函数性质	选择题	10	6	0.55	3.3		√		
	切线方程	填空题	13	5	0.6	3		√		
	极值点的存在性问题	解答题	18(1)	4	0.85	3.4	√			
	证明恒等式	解答题	18(2)(ⅰ)	5	0.6	3		√		
	不等式恒成立问题	解答题	18(2)(ⅱ)	8	0.35	2.8			√	
集合与复数	集合的运算	选择题	1	5	0.95	4.75	√			6.67%
	复数的四则运算与模长	选择题	2	5	0.95	4.75	√			
解析几何	双曲线的性质	选择题	5	5	0.8	4		√		18.67%
	抛物线的性质	选择题	11	6	0.35	2.1			√	
	求椭圆方程	解答题	19(1)	3	0.8	2.4	√			
	解析几何	解答题	19(2)	7	0.4	2.8			√	
	解析几何与数列综合	解答题	19(3)	7	0.3	2.1			√	
立体几何	正四棱台内切球与体积	选择题	7	5	0.7	3.5		√		16.67%
	立体几何与解析几何综合	填空题	14	5	0.2	1			√	
	线线垂直	解答题	16(1)	6	0.9	5.4	√			
	二面角	解答题	16(2)	9	0.8	7.2		√		
统计与概率	统计量(均值、中位数、极差)	选择题	3	5	0.9	4.5	√			13.33%
	正态分布	解答题	17(1)	6	0.9	5.4	√			
	二项分布的分布列与方差	解答题	17(2)	9	0.7	6.3		√		
三角函数与数列、平面向量	余弦定理	解答题	15(1)	5	0.9	4.5	√			19.33%
	解三角形综合应用	解答题	15(2)	8	0.8	6.4		√		
	向量垂直与数量积	填空题	12	5	0.8	4		√		
	三角恒等变换	选择题	4	5	0.9	4.5	√			
	等差数列基本性质	选择题	9	6	0.6	3.6		√		
统计百分比				150	0.668	100.2				100%

答案及解析

1.【参考答案】B

【解题思路】因为 $U=\{x\in\mathbf{Z}\mid |x|\leqslant 3\}=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$，$A=\{-3,2,3\}$，$B=\{-3,0,2\}$，所以 $A\cup B=\{-3,0,2,3\}$，所以 $\complement_U(A\cup B)=\{-2,-1,1\}$.

2.【参考答案】C

【解题思路】因为 $z\cdot(2-3\mathrm{i})=|3-2\mathrm{i}|^2=13$，所以 $z=\frac{13}{2-3\mathrm{i}}=\frac{13(2+3\mathrm{i})}{(2-3\mathrm{i})(2+3\mathrm{i})}=2+3\mathrm{i}$.

3.【参考答案】A

【解题思路】由表格可知，A 专卖店营业额的平均值为 $\frac{5+9+18+24+23+37}{6}=\frac{58}{3}$，$B$ 专卖店营业额的平均值为 $\frac{6+8+26+20+38+34}{6}=22$. 又 $\frac{58}{3}<22$，所以 A 专卖店营业额的平均值小于 B 专卖店营业额的平均值，故选项 A 正确；B 专卖店营业额没有逐月增加，故选项 B 错误；A 专卖店营业额的中位数为 $\frac{18+23}{2}=20.5$ 万元，故选项 C 错误；A 专卖店营业额的极差 $37-5=32$ 等于 B 专卖店营业额的极差 $38-6=32$，故选项 D 错误.

4.【参考答案】D

【解题思路】因为 $\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\theta+\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta=1$，即 $\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=1$，所以 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 2\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=1-2\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=1-2\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

5.【参考答案】C

【解题思路】因为双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$，所以 $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$. 又 $A(-a,0)$，$B(a,0)$，设 $P(x_0,y_0)$，所以 $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$，$k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{y_0}{x_0+a}\cdot\frac{y_0}{x_0-a}=\frac{y_0^2}{x_0^2-a^2}=b^2\left(\frac{x_0^2}{a^2}-1\right)\cdot\frac{1}{x_0^2-a^2}=\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$，所以直线 PA 与直线 PB 的斜率之积为 $\frac{1}{4}$.

6.【参考答案】B

【解题思路】因为奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=-f(x)$，所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，即 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数. 因为奇函数 $f(x)$ 的自变量 x 可取 0，所以 $f(0)=0$. 又因为当 $x\in[0,1)$ 时，$f(x)=4^x+a$，所以 $f(0)=1+a=0$，则 $a=-1$，所以当 $x\in[0,1)$ 时，$f(x)=4^x-1$，所以 $f(101.5)=f(25\times4+1.5)=f(1.5)=f(2-0.5)=-f(-0.5)=f(0.5)=4^{0.5}-1=1$.

7.【参考答案】A

【解题思路】如图 1，取 A_1D_1，B_1C_1，AD，BC 的中点 N，M，E，F，设上底面与球相切的点为 H，则平面

$NMFE$ 为一个含内切圆的等腰梯形截面图如图 2. 因为等腰梯形有内切圆的充要条件为上底＋下底＝两腰之和，$NM=A_1B_1=2$，$EF=AB=4$，所以 $NE=\frac{2+4}{2}=3$，所以梯形的高 $HK=\sqrt{3^2-\left(\frac{4-2}{2}\right)^2}=2\sqrt{2}$，此时梯形的高即为正四棱台的高 h. 又因为正四棱台的体积 $V=\frac{1}{3}h(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})$，$S_1$ 为上底面的面积，$S_1=2\times2=4$，S_2 为下底面的面积，$S_2=4\times4=16$，所以 $V=\frac{1}{3}\times2\sqrt{2}\times(4+16+\sqrt{4\times16})=\frac{56\sqrt{2}}{3}$.

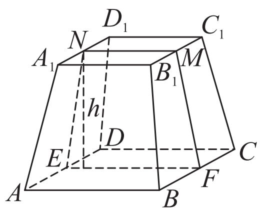


图 1

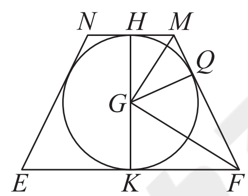


图 2

8.【参考答案】A

【解题思路】由题意可得，$e^x+x\geqslant a(x+1)+\ln[a(x+1)]$. 令 $f(t)=t+\ln t$，则 $f(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$f(e^x)\geqslant f(a(x+1))$，所以 $e^x\geqslant a(x+1)$，即 $a\leqslant\frac{e^x}{x+1}$ 在 $(-1,+\infty)$ 上恒成立. 令 $h(x)=\frac{e^x}{x+1}$，则 $h'(x)=\frac{xe^x}{(x+1)^2}$，所以 $h(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $h(x)\geqslant h(0)=1$，所以 $a\in(0,1]$.

9.【参考答案】BCD

【解题思路】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d. 由题意可得，$\begin{cases}3a_1+3d=9,\\6a_1+15d=36,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=1,\\d=2,\end{cases}$ 所以 $a_n=1+2(n-1)=2n-1$. 对于 A，$a_4=2\times4-1=7$，故 A 错误；对于 B，因为 $a_{2n}=2\times2n-1=4n-1$，$2a_n+1=2(2n-1)+1=4n-1$，所以 $a_{2n}=2a_n+1$，故 B 正确；对于 C，因为 $S_n=n^2$，所以 $S_{2^n}=(2^n)^2=2^{2n}$. 因为 $\frac{S_{2^{n+1}}}{S_{2^n}}=\frac{2^{2(n+1)}}{2^{2n}}=4$，所以数列 $\{S_{2^n}\}$ 为等比数列，故 C 正确；对于 D，因为 $\sqrt{S_n}=n$，所以 $(-1)^n\sqrt{S_n}=(-1)^n n$，所以数列 $\{(-1)^n\sqrt{S_n}\}$ 的前 $2n$ 项和为 $-1+2-3+4-\cdots-(2n-1)+2n=(-1+2)+(-3+4)+\cdots+[-(2n-1)+2n]=n$，故 D 正确.

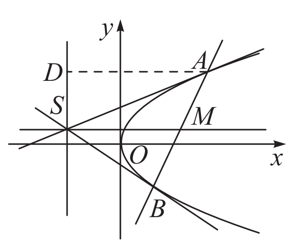
10.【参考答案】BC

【解题思路】对于 A，当 $a=0$ 时，$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$，$f'(x)=x^2-1$，当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，当 x 无限趋于正无穷大时，$f(x)$ 也无限趋于正无穷大，所以 $f(x)$ 没有最大值，故 A 错误；对于 B，法一：$f'(x)=x^2+2ax-1$，令 $g(x)=x^2+2ax-1$，则 $g'(x)=2x+2a$，结合三次函数对称性可知，$g'(1)=2+2a=0$，所以 $a=-1$，故 B 正确；法二：若函数 $f(x)$ 图象的对称中心为 $(1,f(1))$，则对任意实数 t，恒有 $f(1+t)+f(1-t)=2f(1)$，所以 $f(1+a)+f(1-a)=2f(1)$，代入化简，得

$a=-1$，故 B 正确；对于 C，$f'(x)=x^2+2ax-1$，$\Delta=4a^2+4>0$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=-a-\sqrt{a^2+1}$ 或 $x=-a+\sqrt{a^2+1}$，所以当 $-a-\sqrt{a^2+1}<x<-a+\sqrt{a^2+1}$ 时 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(-a-\sqrt{a^2+1},-a+\sqrt{a^2+1})$ 上单调递减，故 C 正确；对于 D，$f(x)=\frac{1}{3}x(x^2+3ax-3)$，$f(0)=0$，令 $h(x)=x^2+3ax-3$，$\Delta=9a^2+12>0$. 又 $h(0)=-3\neq0$，所以 $h(x)=0$ 有两个不为 0 的根，所以 $f(x)$ 有 3 个零点，故 D 错误.

11.【参考答案】BCD

【解题思路】对于 A，因为抛物线 C 的焦点为 $F\left(\frac{1}{2},0\right)$，所以 $p=1$，抛物线 C 的准线方程为 $x=-\frac{1}{2}$. 如图，过点 A 作抛物线 C 的准线的垂线，垂足为 D. 由抛物线的定义可知，$|AF|=|AD|$，则 $|AN|+|AF|=|AN|+|AD|\geqslant|ND|=\frac{3}{2}$，当且仅当 D,A,N 三点共线时取等号，故 A 错误；对于 B，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，过点 A 的切线方程为 $x=t(y-y_1)+x_1$（切线斜率不为 0），联立抛物线方程 $y^2=2x$，化简并整理，得 $y^2-2ty+2ty_1-2x_1=0$. 又 $y_1^2=2x_1$，所以 $y^2-2ty+2ty_1-y_1^2=0$，$\Delta=4t^2-8ty_1+4y_1^2=4(t-y_1)^2=0$，所以 $t=y_1$，所以过点 A 的切线方程为 $x=y_1(y-y_1)+x_1$，即 $y_1y=x+x_1$. 同理可得，过点 B 的切线方程为 $y_2y=x+x_2$. 联立 $\begin{cases}y_1y=x+x_1,\\y_2y=x+x_2,\end{cases}$ 得 $S\left(\frac{y_1y_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$. 因为线段 AB 的中点 M 的坐标为 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$，所以点 S,M 的纵坐标相等，故 B 正确；对于 C，设直线 AB 的方程为 $x=ny+m$，联立 $y^2=2x$，化简并整理，得 $y^2-2ny-2m=0$，则 $y_1y_2=-2m$，$y_1+y_2=2n$. 又因为点 S 在直线 $x=-2$ 上，所以 $\frac{y_1y_2}{2}=-2$，所以 $m=2$，即直线 AB 的方程为 $x=ny+2$，则直线 AB 过点 $(2,0)$，故 C 正确；对于 D，因为 A,F,B 三点共线，所以 $m=\frac{1}{2}$，即直线 AB 的方程为 $x-ny-\frac{1}{2}=0$，$S\left(-\frac{1}{2},n\right)$，所以点 S 到直线 AB 的距离 $d=\frac{\left|-\frac{1}{2}-n^2-\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{1^2+n^2}}=\sqrt{1+n^2}$，$|AB|=\sqrt{1+n^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{1+n^2}\cdot\sqrt{4n^2+4}=2n^2+2$，所以 $S_{\triangle ABS}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\sqrt{(1+n^2)^3}$，当 $n=0$ 时取最小值为 1，故 D 正确. 故选 BCD.



12.【参考答案】$\frac{5}{2}$

【解题思路】因为 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=4$，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{3}=2\times4\times\frac{1}{2}=4$. 因为

$(k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，所以$(k\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2+(k-1)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4k-16+4(k-1)=8k-20=0$，解得 $k=\frac{5}{2}$.

13.【参考答案】$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解题思路】曲线 $f(x)=x\ln x$ 上的点到直线 $x-y-2=0$ 的最短距离为曲线 $f(x)=x\ln x$ 上平行于直线 $x-y-2=0$ 的切线与该直线间的距离，即相应切点到直线 $x-y-2=0$ 的距离. 由 $x-y-2=0$，得 $y=x-2$，所以直线 $x-y-2=0$ 的斜率为 1. 由 $f(x)=x\ln x$，得 $f'(x)=\ln x+1$. 令 $\ln x+1=1$，得 $x=1$. 又 $f(1)=0$，所以曲线 $f(x)=x\ln x$ 上平行于直线 $x-y-2=0$ 的切线相应的切点为$(1,0)$. 因为点$(1,0)$到直线 $x-y-2=0$ 的距离为$\frac{|1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以曲线 $f(x)=x\ln x$ 上的点到直线 $x-y-2=0$ 的最短距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

14.【参考答案】36

【解题思路】如图 1，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AD\perp$平面 DCC_1D_1，$CM\perp$平面 DCC_1D_1，则 $AD\perp PD$，$CM\perp PC$. 因为点 P 在平面 DCC_1D_1 内，$\angle APD=\angle CPM$，所以在 $\mathrm{Rt}\triangle PDA$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle PCM$ 中，$\tan\angle APD=\frac{AD}{PD}=\tan\angle CPM=\frac{CM}{PC}$，所以$\frac{6}{PD}=\frac{3}{PC}$，即 $PD=2PC$. 在平面 DCC_1D_1 中，以 DC 所在直线为 x 轴，以线段 DC 的垂直平分线为 y 轴建立平面直角坐标系如图 2，则 $D(-3,0)$，$C(3,0)$. 设 $P(x,y)$. 因为 $PD=2PC$，所以 $\sqrt{(x+3)^2+y^2}=2\sqrt{(x-3)^2+y^2}$，整理得 $x^2-10x+y^2+9=0$，即 $(x-5)^2+y^2=16$，所以点 P 的轨迹是以$(5,0)$为圆心，半径为 4 的圆. 当点 P 到棱 CD 的距离最大时，四棱锥 $P-ADCM$ 的体积取得最大值，即 $V_{\max}=\frac{1}{3}\times\left[\frac{1}{2}\times(3+6)\times6\right]\times4=36$.

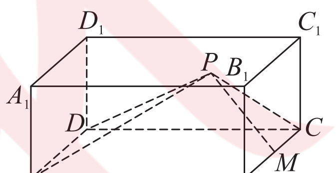


图 1

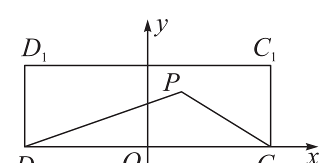


图 2

15.【解题思路】(1)因为 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$，$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，

所以 $4\times\frac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{3}(a^2-b^2-c^2)=-2\sqrt{3}bc\cos A$，………………………………………… 3 分

即 $\sin A=-\sqrt{3}\cos A$，所以 $\tan A=-\sqrt{3}$.

又 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$. ………………………………………………………………… 5 分

(2)因为 $\cos B=\frac{13}{14}$，$0<B<\pi$，所以 $\sin B=\sqrt{1-\left(\frac{13}{14}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，

所以 $\sin C=\sin(\pi-A-B)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-B\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos B-\cos\frac{\pi}{3}\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{13}{14}-\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$.

由正弦定理可得，$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{7\times\frac{3\sqrt{3}}{14}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=3$，$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{7\times\frac{5\sqrt{3}}{14}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=5$. ………………………… 9 分

又 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$，

所以 $\frac{1}{2}\times5\times3\times\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}\times5\times AD\times\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\times3\times AD\times\sin\frac{\pi}{3}$，………………………… 12 分

所以 $AD=\frac{15}{8}$. ………………………………………………………………………… 13 分

16.【解题思路】(1)因为底面 $ABCD$ 为矩形，所以 $CD\perp AD$.

又因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $CD\perp$ 平面 PAD. ………………………………………………………………… 2 分

又 $AM\subset$ 平面 PAD，所以 $CD\perp AM$.

因为 $\triangle PAD$ 为正三角形，M 是 PD 的中点，所以 $AM\perp PD$.

又 $AM\perp CD$，$PD\cap CD=D$，$PD,CD\subset$ 平面 PCD，

所以 $AM\perp$ 平面 PCD. ……………………………………………………………… 5 分

又 $PC\subset$ 平面 PCD，所以 $AM\perp PC$. ………………………………………………… 6 分

(2)如图，取 AD 的中点 O，连接 PO，则 $PO\perp AD$.

因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$PO\subset$ 平面 PAD，

所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$.

以 O 为原点，过点 O 平行于 AB 的直线为 x 轴，OD,OP 为 y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$. ……………………………………………………………………………… 7 分

设 $AB=a$，$AD=2$，$a>0$，则 $B(a,-1,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，$A(0,-1,0)$，$D(0,1,0)$，$C(2,1,0)$，

$M\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，则 $\overrightarrow{AM}\left(0,\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{BP}=(-a,1,\sqrt{3})$.

设平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{t}=(0,0,1)$.

因为 PB 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$，

所以 $|\cos\langle\overrightarrow{BP},\boldsymbol{t}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{BP}\cdot\boldsymbol{t}|}{|\overrightarrow{BP}||\boldsymbol{t}|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+1+3}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，解得 $a=2$(负值已舍去). ………………… 9 分

$\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$，设平面 ABM 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}y_1+\frac{\sqrt{3}}{2}z_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=2x_1=0,\end{cases}$

令 $y_1=1$，得 $x_1=0$，$z_1=-\sqrt{3}$，

所以 $\boldsymbol{m}=(0,1,-\sqrt{3})$. ………………………………………… 11 分

$\overrightarrow{BP}=(-2,1,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$,设平面 PBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$,

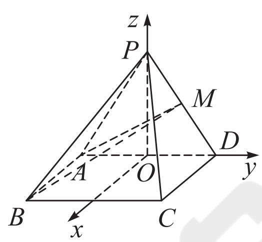
则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BP}=-2x_2+y_2+\sqrt{3}z_2=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=2y_2=0,\end{cases}$

令 $x_2=\sqrt{3}$,得 $y_2=0,z_2=2$,

所以 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},0,2)$, ………………………………………… 13 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=-\dfrac{\sqrt{21}}{7}$,

所以平面 ABM 与平面 PBC 夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$. ………………………………………… 15 分



17.【解题思路】(1)因为 $P(\mu-\sigma<\xi\leqslant\mu+\sigma)\approx0.6827$,$P(\mu-2\sigma<\xi\leqslant\mu+2\sigma)\approx0.9545$,

所以 $P(\xi\leqslant81)=\dfrac{1-P(81<\xi\leqslant89)}{2}=\dfrac{1-0.6827}{2}\approx0.15865$,$P(\xi>93)=\dfrac{1-P(77<\xi\leqslant93)}{2}=\dfrac{1-0.9545}{2}\approx0.02275$,

所以 $P(\xi\leqslant81)+P(\xi>93)=0.1814$, ………………………………………… 5 分

所以三环路上观测到的车辆中任取一辆,估计该车辆不需矫正速度的概率为 $1-0.1814=0.8186$.

………………………………………… 6 分

(2)由题意可知,需要矫正速度的车辆数 η 的取值为 0,1,2,3,且车速在(81,93]之外的车辆需要矫正速度,

所以不需要矫正速度的概率 $P_1=\dfrac{68+73+19}{200}=\dfrac{4}{5}$,需要矫正速度的概率 $P_2=1-\dfrac{4}{5}=\dfrac{1}{5}$.

因为以该兴趣小组测得数据中的频率视为概率,

所以 $\eta\sim B\left(3,\dfrac{1}{5}\right)$, ………………………………………… 9 分

所以 $P(\eta=n)=C_3^nP_1^{3-n}P_2^n=C_3^n\left(\dfrac{4}{5}\right)^{3-n}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n(n=0,1,2,3)$,$\eta$ 的分布列如下:

η	0	1	2	3
P	$\dfrac{64}{125}$	$\dfrac{48}{125}$	$\dfrac{12}{125}$	$\dfrac{1}{125}$

………………………………………… 13 分

η 的方差 $D(\eta)=3\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{12}{25}$. ………………………………………… 15 分

18.【解题思路】(1)因为 $f(x)=x\sin x$，所以 $f'(x)=\sin x+x\cos x$.

令 $h(x)=\sin x+x\cos x$，得 $h'(x)=2\cos x-x\sin x$，

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时，$h'(x)<2\cos x<0$，$f'(x)$单调递减，$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1>0$，$f'(\pi)=-\pi<0$，

所以存在 $x_1\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$使得 $f'(x_1)=0$，

所以当$\frac{\pi}{2}<x<x_1$ 时，$f'(x)>0$；当 $x_1<x<\pi$时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},x_1\right)$上单调递增，在$(x_1,\pi)$上单调递减，即 $f(x)$有极大值点 x_1. ………………… 4 分

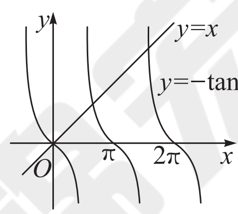
(2)(ⅰ)因为函数 $f(x)=x\sin x(x\in\mathbf{R})$，所以 $f'(x)=\sin x+x\cos x$.

令 $f'(x)=0$，得 $\sin x+x\cos x=0$，对满足方程的 x 有 $\cos x\neq0$，所以 $x=-\tan x$.

由函数 $y=x$ 与函数 $y=-\tan x$ 的图象可知，此方程一定有解，

故 $f(x)$的一个极值点 x_0 满足 $\tan x_0=-x_0$， ……………………………………………………………… 6 分

所以$[f(x_0)]^2=(x_0\sin x_0)^2=x_0^2\sin^2 x_0=\frac{x_0^2\sin^2 x_0}{\sin^2 x_0+\cos^2 x_0}=\frac{x_0^2\tan^2 x_0}{\tan^2 x_0+1}=\frac{x_0^4}{1+x_0^2}$. ………………… 9 分



(ⅱ)因为 x_0 为 $f(x)$的一个极值点，所以 $f'(x_0)=\sin x_0+x_0\cos x_0=0$，$\tan x_0=-x_0$，

所以$|f(x_0)|=|x_0\sin x_0|=|x_0|\sqrt{\frac{\sin^2 x_0}{\sin^2 x_0+\cos^2 x_0}}=|x_0|\sqrt{\frac{\tan^2 x_0}{\tan^2 x_0+1}}=\frac{x_0^2}{\sqrt{x_0^2+1}}=\sqrt{x_0^2+1}-\frac{1}{\sqrt{x_0^2+1}}$. …………………………………………………………………………… 11 分

令 $t=\sqrt{x_0^2+1}(t\geqslant1)$.

因为$|f(x_0)|\geqslant\lambda\ln(1+x_0^2)$，所以 $t-\frac{1}{t}\geqslant2\lambda\ln t$.

记 $g(t)=t-\frac{1}{t}-2\lambda\ln t(t\geqslant1)$，即 $g(t)\geqslant0$，$g'(t)=1+\frac{1}{t^2}-\frac{2\lambda}{t}=\frac{t^2-2\lambda t+1}{t^2}$.

令 $h(t)=t^2-2\lambda t+1(t\geqslant1)$，

当 $\lambda\leqslant1$ 时，$h(t)$在$[1,+\infty)$上单调递增，$h(t)\geqslant h(1)=2-2\lambda\geqslant0$，$g'(t)\geqslant0$，$g(t)$在$[1,+\infty)$上单调递增，$g(t)\geqslant g(1)=0$，符合题意. ……………………………………………………………… 15 分

当 $\lambda>1$ 时，$h(t)$在$(1,\lambda)$上单调递减，在$(\lambda,+\infty)$上单调递增.

因为 $h(1)=2-2\lambda<0$，

所以当 $t\in(1,\lambda)$时，$h(t)<h(1)<0$，$g'(t)<0$，$g(t)$在$(1,\lambda)$上单调递减，$g(t)<g(1)=0$，不符合题意.

综上所述，实数 λ 的取值范围为$(-\infty,1]$. ……………………………………………………… 17 分

19.【解题思路】(1)由题意可知，椭圆 C 的焦点在 x 轴上，设椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$.

因为椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1,0)$和 $F_2(1,0)$，$\triangle MF_1F_2$ 的面积的最大值为 $2\sqrt{2}$，

所以$\begin{cases}c=1,\\ S=\frac{1}{2}|F_1F_2||y_M|\leqslant bc=2\sqrt{2},\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=3,\\ b=2\sqrt{2},\\ c=1,\end{cases}$

所以椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$. ………………………………………………………… 3 分

(2)设 $P_n(x_n,y_n)$，$x_n\in[-3,3]$.

因为当 n 为奇数时，$A_n=|F_2P_n|$，$B_n=|F_2P_{n+1}|$，

所以 $A_{2n-1}=|F_2P_{2n-1}|$，$B_{2n-1}=|F_2P_{2n}|$，P_{2n-1}，F_2，P_{2n}三点共线，…………………………… 4 分

设所在直线方程为 $x=my+1$.

联立$\begin{cases}x=my+1,\\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1,\end{cases}$得$(8m^2+9)y^2+16my-64=0$，

所以 $y_{2n-1}+y_{2n}=\frac{-16m}{8m^2+9}$，$y_{2n-1}y_{2n}=\frac{-64}{8m^2+9}$. …………………………………………… 5 分

由椭圆的第二定义可得，$A_{2n-1}=|F_2P_{2n-1}|=\frac{c}{a}\cdot\left|x_{2n-1}-\frac{a^2}{c}\right|=\frac{1}{3}|x_{2n-1}-9|=\frac{1}{3}(9-x_{2n-1})$，$B_{2n-1}=$ $|F_2P_{2n}|=\frac{c}{a}\cdot\left|x_{2n}-\frac{a^2}{c}\right|=\frac{1}{3}|x_{2n}-9|=\frac{1}{3}(9-x_{2n})$，…………………………………………… 6 分

所以$\frac{1}{A_{2n-1}}+\frac{1}{B_{2n-1}}=\frac{3}{9-x_{2n-1}}+\frac{3}{9-x_{2n}}=\frac{3(9-x_{2n})+3(9-x_{2n-1})}{(9-x_{2n-1})(9-x_{2n})}=\frac{54-3(x_{2n-1}+x_{2n})}{81-9(x_{2n}+x_{2n-1})+x_{2n}x_{2n-1}}$. …

……………………………………………………………………………………………………… 7 分

因为 $x_{2n-1}+x_{2n}=m(y_{2n-1}+y_{2n})+2=\frac{-16m^2+2(8m^2+9)}{8m^2+9}=\frac{18}{8m^2+9}$，$x_{2n}x_{2n-1}=(my_{2n}+1)$ $(my_{2n-1}+1)=m^2y_{2n-1}y_{2n}+m(y_{2n}+y_{2n-1})+1=m^2\cdot\frac{-64}{8m^2+9}+m\cdot\frac{-16m}{8m^2+9}+1=$ $\frac{-64m^2-16m^2+8m^2+9}{8m^2+9}=\frac{-72m^2+9}{8m^2+9}$，

所以$\frac{1}{A_{2n-1}}+\frac{1}{B_{2n-1}}=\frac{54-3(x_{2n-1}+x_{2n})}{81-9(x_{2n}+x_{2n-1})+x_{2n}x_{2n-1}}=\frac{54-3\cdot\frac{18}{8m^2+9}}{81-9\cdot\frac{18}{8m^2+9}+\frac{-72m^2+9}{8m^2+9}}$

$=\frac{\frac{54\times8(m^2+1)}{8m^2+9}}{\frac{81(8m^2+9)-18\times9-72m^2+9}{8m^2+9}}=\frac{54\times8(m^2+1)}{72\times8m^2+72\times8}=\frac{3}{4}$.

故$\frac{1}{A_{2n-1}}+\frac{1}{B_{2n-1}}(n\in\mathbf{N}^*)$为定值$\frac{3}{4}$. ………………………………………………………… 10 分

(3)由(2)可知，$\frac{1}{A_{2n-1}}+\frac{1}{B_{2n-1}}=\frac{3}{4}$，即$\frac{1}{|F_2P_{2n-1}|}+\frac{1}{|F_2P_{2n}|}=\frac{3}{4}$.

由椭圆的对称性可知，$\frac{1}{|F_1P_{2n}|}+\frac{1}{|F_1P_{2n+1}|}=\frac{1}{A_{2n}}+\frac{1}{B_{2n}}=\frac{3}{4}$，

所以$\frac{1}{A_n}+\frac{1}{B_n}=\frac{3}{4}$，则 $B_n=\frac{1}{\frac{3}{4}-\frac{1}{A_n}}=\frac{4A_n}{3A_n-4}$. ………………………………………………………… 12 分

由椭圆的定义可得，$B_n+A_{n+1}=|F_1P_{n+1}|+|F_2P_{n+1}|=2a=6$，

所以 $A_{n+1}=6-B_n=6-\frac{4A_n}{3A_n-4}=\frac{14A_n-24}{3A_n-4}$.

令 $D_n=\frac{A_n-4}{A_n-2}$， ………………………………………………………………………………………… 14 分

则 $D_{n+1}=\frac{A_{n+1}-4}{A_{n+1}-2}=\frac{\frac{14A_n-24}{3A_n-4}-4}{\frac{14A_n-24}{3A_n-4}-2}=\frac{14A_n-24-12A_n+16}{14A_n-24-6A_n+8}=\frac{2A_n-8}{8A_n-16}=\frac{2(A_n-4)}{8(A_n-2)}=\frac{1}{4}D_n$.

又 $A_1=3$，$D_1=\frac{A_1-4}{A_1-2}=\frac{3-4}{3-2}=-1$，

所以数列$\left\{\frac{A_n-4}{A_n-2}\right\}$是首项为$-1$，公比为$\frac{1}{4}$的等比数列，……………………………………………… 16 分

所以 $D_n=\frac{A_n-4}{A_n-2}=-\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$，整理得$\frac{1}{A_n}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2(4^n+2)}$. ……………………………………… 17 分