

数 学

(全卷满分 150 分,考试时间 120 分钟)

注意事项:

- 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在本试卷和答题卡相应位置上。
- 作答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。
- 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答。答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上;如需改动,先画掉原来的答案,然后再写上新答案;不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
- 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后,将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- 设全集 $U = \{x \in \mathbf{Z} \mid |x| \leq 3\}$, 集合 $A = \{-3, 2, 3\}$, $B = \{-3, 0, 2\}$, 则 $\complement_U(A \cup B) =$
 A. $\{-3, 0, 2, 3\}$ B. $\{-2, -1, 1\}$ C. $\{-3, 2\}$ D. $\{0, 3\}$
- 若复数 z 满足 $z \cdot (2 - 3i) = |3 - 2i|^2$, 则 $z =$
 A. $2 - 3i$ B. $-2 - 3i$ C. $2 + 3i$ D. $-2 + 3i$
- 为了研究 A, B 两个机器人专卖店的销售状况,统计了 2025 年 1 月至 6 月 A, B 两个专卖店每月的营业额(单位:万元),得到如下表格,则下列说法正确的是

月份 \ 营业额	1	2	3	4	5	6
A 专卖店	5	9	18	24	23	37
B 专卖店	6	8	26	20	38	34

- A 专卖店营业额的平均值小于 B 专卖店营业额的平均值
- B 专卖店营业额逐月上升
- A 专卖店营业额的中位数为 21 万元
- A 专卖店营业额的极差大于 B 专卖店营业额的极差

4. 已知 $\sin \theta + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 1$, 则 $\cos\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) =$

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $-\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

5. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{1}{2}x$, A, B 分别为双曲线 C 的左、右顶点, 点 P 在双曲线上(异于 A, B 两点), 则直线 PA 与直线 PB 的斜率之积为

- A. 4 B. -4 C. $\frac{1}{4}$ D. $-\frac{1}{4}$

6. 已知奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = -f(x)$, 当 $x \in [0, 1)$ 时, $f(x) = 4^x + a$, 则 $f(101.5) =$

- A. 0 B. 1 C. 3 D. 5

7. 已知在正四棱台 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 4, A_1B_1 = 2$, 若存在一个球与此正四棱台的各个面都相切, 则此正四棱台的体积为

- A. $\frac{56\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{56\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{112\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{112\sqrt{3}}{3}$

8. 不等式 $e^x - \ln(x+1) + x - \ln a \geq a(x+1)$ 恒成立, 则 a 的取值范围为

- A. $(0, 1]$ B. $(0, 1)$ C. $(0, e-1]$ D. $(0, e-1)$

二、选择题:本大题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分。

9. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,若 $S_3 = 9, S_6 = 36$, 则

- $a_4 = 9$
- $a_{2n} = 2a_n + 1$
- 数列 $\{S_{2^n}\}$ 为等比数列
- 数列 $\{(-1)^n \sqrt{S_n}\}$ 的前 $2n$ 项和为 n

10. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 - x (a \in \mathbf{R})$, 则

- 当 $a = 0$ 时, 函数 $f(x)$ 有最大值
- 若函数 $f(x)$ 图象的对称中心为 $(1, f(1))$, 则 $a = -1$
- 函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上一定存在减区间
- 函数 $f(x)$ 可能有 2 个零点

11. 已知点 $F(\frac{1}{2}, 0)$ 为抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点, 点 A, B 分别为抛物线 C 上两点, 过 A, B 两点分别作抛物线 C 的切线, 两条切线相交于点 S , 设线段 AB 的中点为 M , 则下列说法正确的是

- A. 若点 $N(1, 1)$, 则 $|AN| + |AF|$ 的最小值为 3
- B. 点 S 与点 M 的纵坐标相等
- C. 若点 S 在直线 $x = -2$ 上, 则直线 AB 过点 $(2, 0)$
- D. 若 A, F, B 三点共线, 则 $\triangle ABS$ 的面积的最小值为 1

三、填空题: 本大题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 已知向量 a, b 满足 $|a| = 2, |b| = 4, a$ 与 b 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 若 $(ka - b) \perp (a + b)$, 则 $k = \underline{\quad}$.

13. 曲线 $f(x) = x \ln x$ 上的点到直线 $x - y - 2 = 0$ 的最短距离为 $\underline{\quad}$.

14. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = AD = 6, M$ 为棱 BC 的中点, 动点 P 在平面 DCC_1D_1 内, 且满足 $\angle APD = \angle CPM$, 则四棱锥 $P - ADCM$ 的体积的最大值为 $\underline{\quad}$.

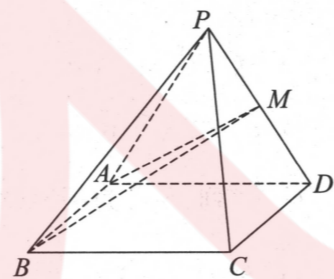
四、解答题: 本大题共 5 小题, 共 77 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 13 分) 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 S , 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $\sqrt{3}(a^2 - b^2 - c^2) = 4S$.

- (1) 求 A ;
- (2) 若 $\cos B = \frac{13}{14}, a = 7, \angle BAC$ 的角平分线交 BC 于点 D , 求线段 AD 的长.

16. (本小题满分 15 分) 在四棱锥 $P - ABCD$ 中, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD, \triangle PAD$ 为正三角形, 四边形 $ABCD$ 为矩形, M 是 PD 的中点, 且 PB 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

- (1) 求证: $AM \perp PC$;
- (2) 求平面 ABM 与平面 PBC 夹角的余弦值.



17. (本小题满分 15 分) 成都市为疏导城市内的交通拥堵问题, 现对三环路进行限速, 经智能交通管理服务系统观测计算, 通过三环路的所有车辆行驶速度近似服从正态分布 $\xi \sim N(85, 16)$, 通过分析, 车速保持在 $(81, 93]$ 之间, 可令道路保持良好的行驶状况, 故认为车速在 $(81, 93]$ 之外的车辆需矫正速度(速度单位: km/h).

- (1) 从该三环路上观测到的车辆中任取一辆, 估计该车辆不需矫正速度的概率;

(2) 某兴趣小组也对该三环路进行了观测, 他们于某个时间段内随机对 200 辆车的速度进行取样, 根据测量的数据列出下面表格:

车速	(73, 77]	(77, 81]	(81, 85]	(85, 89]	(89, 93]	(93, 97]
车辆数	8	25	68	73	19	7

若以该兴趣小组测得数据中的频率视为概率, 从该三环路上的所有车辆中任取三辆, 记其中需要矫正速度的车辆数为 η , 求 η 的分布列和方差.

附: 若 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $P(\mu - \sigma < \xi \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827; P(\mu - 2\sigma < \xi \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545; P(\mu - 3\sigma < \xi \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$.

18. (本小题满分 17 分) 设函数 $f(x) = x \sin x, x \in \mathbf{R}$.

(1) 证明: $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上存在极值点;

(2) 已知 x_0 为 $f(x)$ 的一个极值点;

(i) 证明: $[f(x_0)]^2 = \frac{x_0^4}{1+x_0^2}$;

(ii) 若 $|f(x_0)| > \lambda \ln(1+x_0^2)$, 求实数 λ 的取值范围.

19. (本小题满分 17 分) 【信息 1】已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的方程还可以由椭圆的第二定义得到, 即椭圆 C 上的动点 M 满足到一个定点 $F(c, 0) (c > 0)$ 的距离与到不经过这个定点的一条定直线 $x = \frac{a^2}{c}$ 的距离之比是一个常数 $\frac{c}{a}$, 其中 $a^2 = b^2 + c^2$.

【信息 2】由椭圆的光学性质得到: 从焦点 F_1 处发出的一束光线, 射向椭圆 C 上的点 P_1 , 经椭圆反射后经过焦点 F_2 ; 继续传播, 射向椭圆 C 上的点 P_2 , 经椭圆反射后经过焦点 F_1 ; 如此反复. 设第 n 次入射点为 $P_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 规定: 当 n 为奇数时, $A_n = |F_2 P_n|, B_n = |F_2 P_{n+1}|$; 当 n 为偶数时, $A_n = |F_1 P_n|, B_n = |F_1 P_{n+1}|$.

已知椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1, 0)$ 和 $F_2(1, 0)$, 点 M 在椭圆 C 上, 且 $\triangle MF_1 F_2$ 的面积的最大值为 $2\sqrt{2}$.

- (1) 求椭圆 C 的标准方程;
- (2) 探究 $\frac{1}{A_{2n-1}} + \frac{1}{B_{2n-1}} (n \in \mathbf{N}^*)$ 是否为定值? 请说明理由;
- (3) 若 $A_1 = 3$, 求证: 数列 $\left\{ \frac{A_n - 4}{A_n - 2} \right\}$ 是等比数列, 并求数列 $\left\{ \frac{1}{A_n} \right\}$ 的通项公式.

版权所有 盗版必究 严禁影印网传

数学答题卡

学校 _____ 班级 _____ 姓名 _____ 座位号 _____

准考证号											
[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]	[0]
[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]
[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]	[2]
[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]	[3]
[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]	[4]
[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]	[5]
[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]	[6]
[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]	[7]
[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]	[8]
[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]	[9]

贴条形码区
(正面朝上 切勿贴出虚线框外)

注意事项

1. 根据阅卷方式填写
2. 选择题用2B铅笔填涂，非选择题用0.5毫米及以上黑笔书写
3. 请在规定区域内作答

填涂样例 正确填涂 错误填涂

一、选择题 (每小题5分, 共40分) (考生须用2B铅笔填涂)

- | | | |
|---|---|---|
| 1 <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D | 4 <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D | 7 <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D |
| 2 <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D | 5 <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D | 8 <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D |
| 3 <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D | 6 <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D | |

二、选择题 (每小题6分, 共18分) (考生须用2B铅笔填涂)

- | | | |
|---|--|--|
| 9 <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D | 10 <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D | 11 <input type="checkbox"/> A <input type="checkbox"/> B <input type="checkbox"/> C <input type="checkbox"/> D |
|---|--|--|

三、填空题 (每小题5分, 共15分) (考生须用0.5毫米黑色字迹的钢笔或签字笔书写)

12. _____

13. _____

14. _____

请在各题目的答题区域内作答, 超出答题区域的答案无效

请在各题目的答题区域内作答, 超出答题区域的答案无效

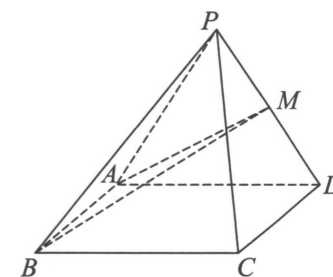
四、解答题 (共77分) (考生须用0.5毫米黑色字迹的钢笔或签字笔书写)

15. (13分)

请在各题目的答题区域内作答, 超出答题区域的答案无效

请在各题目的答题区域内作答, 超出答题区域的答案无效

16. (15分)



请在各题目的答题区域内作答, 超出答题区域的答案无效

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

17. (15分)

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

18. (17分)

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

19. (17分)

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效

请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域的答案无效