

参考答案

1. C

【详解】由题意得 $A = \{x \in \mathbf{Z} \mid (x-2)(x^2-3) = 0\} = \{2\}$,

$B = \{x \mid x^2 < 6\} = \{x \mid -\sqrt{6} < x < \sqrt{6}\}$, 则 $A \cap B = \{2\}$.

2. A

【详解】因为 $z = \frac{i}{1+2i} = \frac{i(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{2+i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$

所以 $\bar{z} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$

所以 $z \cdot \bar{z} = \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i\right)\left(\frac{2}{5} - \frac{1}{5}i\right) = \frac{4}{25} - \frac{1}{25}i^2 = \frac{1}{5}$.

3. B

【详解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ,

在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $S_4 = 16$, $a_5 - a_3 = 4$,

所以有 $\begin{cases} 4a_1 + 6d = 16 \\ 2d = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$, 故 $a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$,

所以 $b_2 = a_2 = 3$, $b_3 = a_5 = 9$, 则 $q = \frac{9}{3} = 3$, 故 $b_6 = b_3 \times q^3 = 9 \times 3^3 = 243$.

故选: B

4. B

【详解】由题意可得 $\begin{cases} 120 = N_0 e^k \\ 270 = N_0 e^{3k} \\ N_0 = 80 \end{cases}$, 所以 $\begin{cases} e^{2k} = \frac{9}{4} \\ N_0 = 80 \end{cases}$, 所以 $y = 80 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{t}{2}}$.

由 $y = 80 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{t}{2}}$, 得 $80 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{t}{2}} \geq 1000$,

两边取自然对数得 $\ln \left(80 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{t}{2}}\right) \geq \ln 1000$, 所以 $\ln 80 + \frac{t}{2} \ln \frac{9}{4} \geq \ln 1000$,

所以 $\ln 80 + \frac{t}{2} (\ln 9 - \ln 4) \geq \ln 1000$,

所以 $3 \ln 2 + \ln 10 + \frac{t}{2} (2 \ln 3 - 2 \ln 2) \geq 3 \ln 10$,

所以 $3\ln 2 + \ln 10 + t(\ln 3 - \ln 2) \geq 3\ln 10$,

所以 $t \geq \frac{2\ln 10 - 3\ln 2}{\ln 3 - \ln 2} = \frac{2 \times 2.3 - 3 \times 0.7}{1.1 - 0.7} = 6.25$, 即 $t \geq 6.25$.

所以最迟应在发现疫情后第 7 天启动.

5. D

【详解】 $(x-y+3)^5 = [x+(3-y)]^5$, 则其展开式通项为 $T_{r+1} = C_5^r x^{5-r} (3-y)^r, 0 \leq r \leq 5, r \in \mathbf{N}$,

令 $r=2$, 则 $(x-y+3)^5$ 的展开式中含 x^3 的项为

$$C_5^2 x^3 (3-y)^2 = 10x^3 (9-6y+y^2) = 90x^3 - 60x^3y + 10x^3y^2,$$

所以 x^3y 的系数为 -60 ,

故选: D.

6. A

【详解】 因对任意 $x_1, x_2 \in [0, +\infty), x_1 \neq x_2$, 总有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, 可知 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减,

又因 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增,

故 $f(2m-1) < f(m) \Leftrightarrow f(|2m-1|) < f(|m|) \Leftrightarrow |2m-1| > |m|$,

两边取平方得 $(2m-1)^2 > m^2$, 即 $3m^2 - 4m + 1 > 0$, 解得 $m < \frac{1}{3}$ 或 $m > 1$,

故不等式 $f(2m-1) < f(m)$ 的解集为 $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (1, +\infty)$.

7. B

【详解】 因为 $|PF_1| + |PF_2| = 2a = 6$ ①,

$$|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1||PF_2|\cos\angle F_1PF_2 = |F_1F_2|^2,$$

$$\text{即 } |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - \frac{8}{5}|PF_1||PF_2| = 12 \text{ ②, 联立①②,}$$

$$\text{解得: } |PF_1||PF_2| = \frac{20}{3}, |PF_1|^2 + |PF_2|^2 = \frac{68}{3},$$

$$\text{而 } \overrightarrow{PO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2}), \text{ 所以 } |OP| = |\overrightarrow{PO}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2}|,$$

$$\text{即 } |\overrightarrow{PO}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{PF_1} + \overrightarrow{PF_2}| = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{PF_1}|^2 + 2\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} + |\overrightarrow{PF_2}|^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{68}{3} + 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{20}{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

故选: B

8. B

【详解】因对任意 $x \in (0, +\infty)$, $f(x) \geq \ln x$ 恒成立, 即 $e^{(a+1)x} + ax \geq \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立

变形得 $e^{(a+1)x} + (a+1)x \geq \ln x + x$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 即 $(a+1)x + e^{(a+1)x} \geq \ln x + e^{\ln x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

设 $g(x) = x + e^x$, 则有 $g[(a+1)x] \geq g(\ln x)$, 由 $g'(x) = 1 + e^x > 0$, 可知函数 $g(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增,

故得 $(a+1)x \geq \ln x$, 即 $a+1 \geq \frac{\ln x}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

设 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 当 $0 < x < e$ 时, $h'(x) > 0$, 当 $x > e$ 时, $h'(x) < 0$,

则函数 $h(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减,

故 $h(x)$ 在 $x = e$ 时取得极大值, 也是最大值为 $\frac{1}{e}$,

故得 $a+1 \geq \frac{1}{e}$, 即实数 a 的最小值为 $\frac{1}{e} - 1$.

9. BCD

【详解】将样本数据从小到大排序: 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 10,

选项 A, 分位数位置: $i = 10 \times 70\% = 7$, 因为 i 为整数, 所以 70% 分位数是第 7 项和第 8 项数据的平均值,

即分位数是 $\frac{7+8}{2} = 7.5$, A 错误

选项 B, 极差 = 最大值 - 最小值 = $10 - 5 = 5$, B 正确;

选项 C, 样本均值 $\bar{x} = \frac{5+6+6+6+7+7+7+8+8+10}{10} = 7$, 用样本均值估计总体均值, C 正确;

选项 D, 样本方差 $s^2 = \frac{1}{10} [(5-7)^2 + 3 \times (6-7)^2 + 3 \times (7-7)^2 + 2 \times (8-7)^2 + (10-7)^2] = 1.8$, D 正确.

10. BD

【详解】将函数 $y = \sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 得到 $y = \sin 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x$,

将所得图象上所有点的横坐标扩大为原来的 2 倍, 得到函数 $g(x) = \cos x$,

选项 A: $g(x) = \cos x$ 的对称轴为 $x = k\pi (k \in \mathbf{Z})$, $x = \frac{\pi}{2}$ 不是它的对称轴, A 错误;

选项 B: $g(x) = \cos x$ 的对称中心为 $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0\right) (k \in \mathbf{Z})$, 当 $k = 0$ 时, 对称中心为 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, B 正确;

选项 C: $g(x) = \cos x$ 的周期为 2π , 不是 $\frac{\pi}{2}$, C 错误;

选项 D: 解不等式 $\cos x \geq \frac{1}{2}$, 得: $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$,

所以不等式 $g(x) \geq \frac{1}{2}$ 的解集为 $\left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right] (k \in \mathbf{Z})$, D 正确.

11. BCD

【详解】对于 A 选项，设 H 是 A_1D 的中点，连接 HE, HM ，

由于 M 是 A_1C 的中点，所以 $HM \parallel CD, HM = \frac{1}{2}CD$ ，

由于 $BE \parallel CD, BE = \frac{1}{2}CD$ ，所以 $HM \parallel BE, HM = BE$ ，

所以四边形 $HEBM$ 是平行四边形，所以 $BM \parallel HE$ ，

所以 $\angle A_1HE$ 是直线 BM 与直线 A_1D 所成角（或其补角）。

在三角形 A_1DE 中， $\angle DA_1E = \frac{\pi}{2}$ ，所以 $\angle A_1HE \neq \frac{\pi}{2}$ ，所以 A 选项错误。

对于 B 选项，由于 $CE = DE = 2\sqrt{2}, CE^2 + DE^2 = CD^2$ ，所以 $CE \perp DE$ ，

设 F, G 分别是 CD, DE 的中点，连接 A_1G, GF, A_1F ，则 GF 是三角形 CDE 的中位线，

所以 $GF \parallel CE, GF = \frac{1}{2}CE$ ，则 $GF \perp DE$ ，

而 $A_1G \perp DE$ ，所以 $\angle A_1GF$ 是平面 A_1DE 与平面 $DEBC$ 所成二面角，即 $\angle A_1GF = \alpha$ 。

当 $\angle A_1GF = \alpha = \frac{\pi}{2}$ 时，平面 $A_1DE \perp$ 平面 $DEBC$ ，

此时，由于平面 $A_1DE \cap$ 平面 $DEBC = DE, A_1G \perp DE$ ，

所以 $A_1G \perp$ 平面 $DEBC$ ，由于 $CE \subset$ 平面 $DEBC$ ，

所以 $A_1G \perp CE$ ，由于 $DE, A_1G \subset$ 平面 A_1DE ， $DE \cap A_1G = G$ ，

所以 $CE \perp$ 平面 A_1DE ，由于 $A_1E \subset$ 平面 A_1DE ，所以 $CE \perp A_1E$ ，

所以 $\triangle A_1EC$ 面积的最大值为 $\frac{1}{2} \times CE \times A_1E = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$ ，B 选项正确。

对于 C 选项，过 A_1 作 $A_1O \perp GF$ ，垂足为 O ，连接 OE ，

由上述分析可知： $DE \perp A_1G, DE \perp GF$ ，而 $A_1G, GF \subset$ 平面 A_1GF ，

$A_1G \cap GF = G$ ，所以 $DE \perp$ 平面 A_1GF ，由于 $A_1O \subset$ 平面 A_1GF ，

所以 $DE \perp A_1O$ ，由于 $GF, DE \subset$ 平面 $DEBC$ ， $GF \cap DE = G$ ，

所以 $A_1O \perp$ 平面 $DEBC$ ，所以 $\angle A_1EO = \beta$ ，

由于 $\sin \alpha = \frac{A_1O}{A_1G}, \sin \beta = \frac{A_1O}{A_1E}$ ，而 $A_1E = \sqrt{2}A_1G$ ，

所以 $\sin\alpha = \sqrt{2}\sin\beta$ ，所以 C 选项正确。

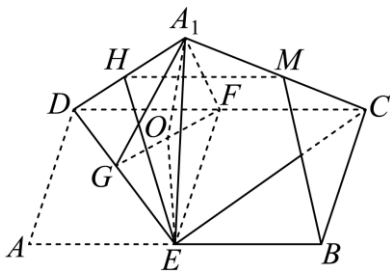
对于 D 选项，三棱锥 A_1-EDC 体积最大时，平面 $A_1DE \perp$ 平面 EDC ，

由于平面 $A_1DE \cap$ 平面 $EDC = DE$ ， $GF \subset$ 平面 EDC ， $GF \perp DE$ ，

所以 $GF \perp$ 平面 A_1DE ，由于 G 是 $\text{Rt}\triangle A_1DE$ 的外心， F 是 $\text{Rt}\triangle DEC$ 的外心，

所以 F 是三棱锥 A_1-EDC 的外接球的球心，

所以外接球的半径 $R = \frac{1}{2}CD = 2$ ，表面积为 $4\pi R^2 = 16\pi$ ，所以 D 选项正确..



12. 4

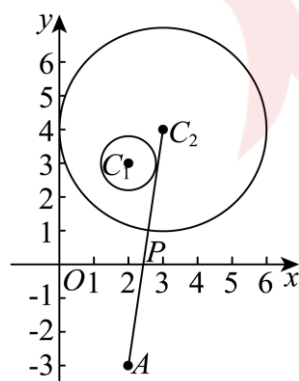
【详解】因 $a > 0, b > 0$ ，则 $ab = a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ，整理得 $\sqrt{ab}(\sqrt{ab} - 2) \geq 0$ ，

解得 $\sqrt{ab} \geq 2$ ，即 $ab \geq 4$ ，当且仅当 $a = b = 2$ 时取等，

故当 $a = b = 2$ 时， ab 取得最小值为 4.

13. $5\sqrt{2} - 4 / -4 + 5\sqrt{2}$

【详解】依题意可知 C_1 的圆心坐标为 $(2, 3)$ ，半径 $r_1 = 1$ ，



C_2 的圆心坐标为 $(3, 4)$ ，半径 $r_2 = 3$ ，

如图所示，对于 x 轴上的任意一点 P ，由图象可知，求 $|PM| + |PN|$ 的最小值，

可转化为求 $|PC_1| - r_1 + |PC_2| - r_2 = |PC_1| + |PC_2| - 4$ 的最小值.

由平面几何的知识易知 C_1 关于 x 轴对称的点 A 的坐标为 $(2, -3)$, $|PC_1| = |PA|$,

当 A, P, C_2 共线时, $|PA| + |PC_2|$ 取得最小值,

即 $|PC_1| + |PC_2|$ 取得最小值, 最小值为 $|AC_2| = 5\sqrt{2}$,

所以 $|PM| + |PN|$ 的最小值为 $5\sqrt{2} - 4$.

故答案为: $5\sqrt{2} - 4$.

14. $\frac{61}{25} / 2.44$

【详解】法一: 依题意, X 的可能取值为 1、2、3,

总的选取可能数为 $5^3 = 125$,

其中 $X = 1$: 三次抽取同一球, 选择球的编号有 5 种方式,

$$\text{故 } P(X = 1) = \frac{5}{125} = \frac{1}{25},$$

$X = 2$: 恰好两种不同球被取出 (即一球出现两次, 另一球出现一次),

选取出现两次的球有 5 种方式, 选取出现一次的球有 4 种方式,

其中选取出现一次球的位置有 3 种可能, 故事件 $X = 2$ 的可能情况有 $5 \times 4 \times 3 = 60$ 种,

$$\text{故 } P(X = 2) = \frac{60}{125} = \frac{12}{25},$$

$X = 3$: 三种不同球被取出,

由排列数可知事件 $X = 3$ 的可能情况有 $5 \times 4 \times 3 = 60$ 种,

$$\text{故 } P(X = 3) = \frac{60}{125} = \frac{12}{25},$$

所以 $E(X) = 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2) + 3 \times P(X = 3)$

$$= 1 \times \frac{5}{125} + 2 \times \frac{12}{25} + 3 \times \frac{12}{25} = \frac{61}{25}.$$

故答案为: $\frac{61}{25}$.

法二: 依题意, 假设随机变量 X_i , 其中 $i = 1, 2, 3, 4, 5$:

其中 $X_i = \begin{cases} 1, & \text{这3次选取中, 球}i\text{至少被取出一次} \\ 0, & \text{这3次选取中, 球}i\text{一次都没被取出} \end{cases}$, 则 $X = \sum_{i=1}^5 X_i$,

由于球的对称性, 易知所有 $E[X_i]$ 相等,

则由期望的线性性质，得 $E[X] = E\left[\sum_{i=1}^5 X_i\right] = \sum_{i=1}^5 E[X_i] = 5E[X_i]$,

由题意可知，球 i 在单次抽取中未被取出的概率为 $\frac{4}{5}$ ，

由于抽取独立，三次均未取出球 i 的概率为 $P(X_i = 0) = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}$ ，

因此球 i 至少被取出一次的概率为： $P(X_i = 1) = 1 - \frac{64}{125} = \frac{61}{125}$ ，

故 $E[X_i] = \frac{61}{125}$ ，

所以 $E[X] = 5E[X_i] = 5 \times \frac{61}{125} = \frac{61}{25}$ 。

故答案为： $\frac{61}{25}$ 。

15. (1) $\varphi(6) = 2$ ， $\varphi(10) = 4$ ， $\varphi(3^n) = 2 \times 3^{n-1}$

(2) $S_n = \frac{1}{4}(2n-1)3^n + \frac{1}{4}$

(3) $\lambda \geq \frac{2}{27}$

【详解】(1) 因为不超过正整数 6 且与 6 互素的正整数只有 1, 5，所以 $\varphi(6) = 2$ ，

因为不超过正整数 10 且与 10 互素的正整数只有 1, 3, 7, 9，所以 $\varphi(10) = 4$ ，

所有不超过正整数 3^n 的正整数有 3^n 个，其中与 3^n 不互素的正整数有 1×3 ， 2×3 ， 3×3 ， \dots ， $3^{n-1} \times 3$ ，共 3^{n-1} 个，

所以所有不超过正整数 3^n ，且与 3^n 互素的正整数的个数为 $3^n - 3^{n-1} = 2 \times 3^{n-1}$ 个，

即 $\varphi(3^n) = 2 \times 3^{n-1}$ ；

(2) $a_n = \frac{1}{2}n \cdot \varphi(3^n) = n \times 3^{n-1}$

$S_n = 1 \times 3^0 + 2 \times 3^1 + 3 \times 3^2 + \dots + (n-1) \times 3^{n-2} + n \times 3^{n-1}$ ，

$3S_n = 1 \times 3^1 + 2 \times 3^2 + 3 \times 3^3 + \dots + (n-1) \times 3^{n-1} + n \times 3^n$ ，

两式相减得

$-2S_n = 1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{n-1} - n \times 3^n = \frac{1}{2}(3^n - 1) - n \times 3^n$ ，

$S_n = \frac{1}{4}(2n-1)3^n + \frac{1}{4}$ ；

(3) 由 (2) 可知 $\frac{4S_n - 1}{2n - 1} = \frac{(2n - 1)3^n + 1 - 1}{2n - 1} = 3^n$

$$T_n = \frac{3(1 - 3^n)}{1 - 3} = \frac{3}{2} \times 3^n - \frac{3}{2},$$

$\lambda \cdot \left(T_n + \frac{3}{2}\right) - 2n + 3 \geq 0$ 得 $\lambda \geq \frac{2}{3} \times \frac{2n - 3}{3^n}$ 恒成立,

$$\text{令 } b_n = \frac{2}{3} \times \frac{2n - 3}{3^n},$$

$$\text{则 } b_{n+1} - b_n = \frac{2}{3} \times \frac{2n - 1}{3^{n+1}} - \frac{2}{3} \times \frac{2n - 3}{3^n} = \frac{2}{3} \times \frac{-4n + 8}{3^{n+1}},$$

可得 $b_2 > b_1$; 当 $n > 2$ 时, $b_{n+1} < b_n$, 当 $n = 2$ 时, $b_{n+1} = b_n$,

所以 $b_n = \frac{2}{3} \times \frac{2n - 3}{3^n}$ 的最大值为 $b_2 = b_3 = \frac{2}{27}$,

故 $\lambda \geq \frac{2}{27}$.

16. (1) $\frac{112}{625}$

(2) 分布列详见解析, 数学期望为 $\frac{82}{25}$

【详解】(1) 情况 1: 在接下来的比赛中, 甲连赢 4 局, 则甲获胜,

概率为 $\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{16}{625}$;

情况 2: 在接下来的比赛中, 甲赢 3 局, 乙赢 1 局,

概率为 $C_4^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{96}{625}$.

所以甲获得这次比赛胜利的概率为 $\frac{16}{625} + \frac{96}{625} = \frac{112}{625}$.

(2) X 的可能取值为 2, 4,

$X = 2$ 时, 在接下来的比赛中, 乙连赢 2 局,

所以 $P(X = 2) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$, 则 $P(X = 4) = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$,

所以 X 的分布列为:

X	2	4
P	$\frac{9}{25}$	$\frac{16}{25}$

数学期望 $E(X) = 2 \times \frac{9}{25} + 4 \times \frac{16}{25} = \frac{82}{25}$.

17. (1) $x - ey + 1 = 0$

(2) $g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增.

(3) (i) 证明见解析; (ii) 证明见解析

【详解】(1) $h(x) = xf(x) = \ln(x+1)$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x+1}$, $h'(e-1) = \frac{1}{e}$, $h(e-1) = 1$,

所以 $h(x)$ 在点 $(e-1, h(e-1))$ 处的切线方程为 $y-1 = \frac{1}{e}[x-(e-1)]$, 即 $x-ey+1=0$.

(2) $g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$, 则

$$g'(x) = f'(x) + f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} - \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{1}{x}+1\right),$$

$$\text{记 } m(x) = g'(x) = \frac{\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)}{x^2} - \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{1}{x}+1\right),$$

$$\text{故 } m'(x) = \frac{-\frac{x}{(x+1)^2} \cdot x^2 - \left[\frac{x}{x+1} - \ln(x+1)\right] 2x}{x^4} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+1} = \frac{2\left(\ln(x+1) - \frac{x(2x+1)}{(x+1)^2}\right)}{x^3}$$

$$\text{设 } F(x) = \ln(x+1) - \frac{x(2x+1)}{(x+1)^2}, \text{ 则 } F'(x) = \frac{x(x-1)}{(x+1)^3}$$

当 $0 < x < 1$ 时, $F'(x) < 0$, $F(x)$ 单调递减, 所以 $F(x) < F(0) = 0$, 即 $m'(x) < 0$, 所以 $g'(x)$ 单调递减,

所以 $g'(x) > g'(1) = 0$, 故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增.

(3) 证明: (i) 令 $t(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$ ($x > 0$), 则 $t'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2} > 0$,

所以 $t(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $t(x) > t(0) = 0$, 即当 $x > 0$ 时 $t(x) > 0$,

所以当 $x > 0$ 时, $\ln(x+1) > \frac{x}{x+1}$;

(ii) 由 (i) 可知当 $x > 0$ 时, $f(x) > \frac{1}{x+1}$, 故 $g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{x+1} + \frac{1}{\frac{1}{x}+1} = 1$,

由于 $g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$, 则 $g\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x)$, 故 $g(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$,

由 (2) 可知 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递增, $y = \frac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递减, 故 $g\left(\frac{1}{x}\right)$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递减, 即 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$

单调递减,

故 $g(x) \leq g(1) = 2\ln 2$ ，所以 $1 < g(x) \leq 2\ln 2$ 。

18. (1) $\sqrt{2}$

(2) (i) $2x^2 - y^2 = 1$; (ii) 证明见解析

【详解】(1) 双曲线 E 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ ，若点 M 在双曲线 E 的渐近线上，

则 $\frac{b}{a} = 1$ ，所以 $\frac{c}{a} = \sqrt{1 + (\frac{b}{a})^2} = \sqrt{2}$ ；

(2) 设 P, Q 的坐标分别为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ，因为点 M 在双曲线 E 上，

所以 $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$ ，

(i) 因为 P, Q 在双曲线 E 上，所以 $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1$ ，

作差可得 $\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2} - \frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2} = 0$ ，即 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \frac{b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)}$ ，

因为 M 是 $\triangle OPQ$ 的重心，所以 $\frac{0+x_1+x_2}{3} = 1, \frac{0+y_1+y_2}{3} = 1$ ，即 $x_1+x_2=3, y_1+y_2=3$ ，

又因为直线 PQ 的斜率为 2，所以 $\frac{b^2 \times 3}{a^2 \times 3} = 2$ ，即 $b^2 = 2a^2$ ，

代入 $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$ 解得 $a^2 = \frac{1}{2}, b^2 = 1$ ，

所以双曲线 E 的方程为 $2x^2 - y^2 = 1$ ；

(ii) 因为 $OP \perp OQ$ ，直线 PQ 不可能垂直于 y 轴，所以设直线 PQ 的方程为 $x = my + n$ ，

代入 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，化简得 $(b^2 m^2 - a^2)y^2 + 2b^2 mny + b^2 n^2 - a^2 b^2 = 0$ ，

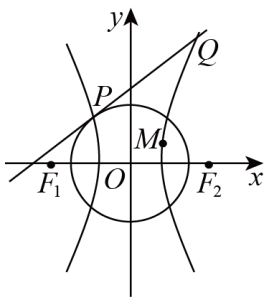
所以 $\Delta > 0, y_1 + y_2 = -\frac{2b^2 mn}{b^2 m^2 - a^2}, y_1 y_2 = \frac{b^2 n^2 - a^2 b^2}{b^2 m^2 - a^2}$ ，

因为 $OP \perp OQ$ ，所以 $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$ ，即 $(my_1 + n)(my_2 + n) + y_1 y_2 = 0$ ，

即 $(m^2 + 1)y_1 y_2 + mn(y_1 + y_2) + n^2 = 0$ ，

化简得 $\frac{n^2}{1+m^2} = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} = \frac{1}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}} = 1$ ，

所以原点到直线 PQ 的距离 $d = \frac{|n|}{\sqrt{1+m^2}} = 1$ ，存在定圆 $x^2 + y^2 = 1$ 与直线 PQ 相切。



19. (1) $\angle ACB = 60^\circ$

(2) (i) 9π ; (ii) $\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2}$.

【详解】(1) 因为 $AD = 2DB$ ，所以 $S_{\triangle ADC} = 2S_{\triangle BDC}$ ，

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times CA \times CD \times \sin \angle ACD = 2 \times \frac{1}{2} \times CB \times CD \times \sin \angle BCD,$$

若 DC 平分 $\angle ACB$ ，则 $\sin \angle ACD = \sin \angle BCD$ ，所以 $AC = 2BC$ 。

设 $BC = a$ ，则 $AC = 2a$ ，

因为 $CD = 2$ ， $AD = 2$ ，所以 $\cos \angle ACD = \frac{a}{2}$ 。

由 $\cos \angle ACD = \cos \angle BCD$ ，得 $\frac{a}{2} = \frac{4+a^2-1}{2 \times 2 \times a}$ ，

解得 $a = \sqrt{3}$ ，即 $BC = \sqrt{3}$ ， $AC = 2\sqrt{3}$ 。

$$\text{所以 } \cos \angle ACB = \frac{(2\sqrt{3})^2 + \sqrt{3}^2 - 3^2}{2 \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{1}{2},$$

又 $0^\circ < \angle ACB < 180^\circ$ ，所以 $\angle ACB = 60^\circ$ ；

(2) (i) 设 $\angle BDC = \theta$ ，作 $AO \perp DC$ ，垂足为 O ，所以 $PO \perp DC$ ，

因为平面 $PDC \perp$ 平面 BDC ，平面 $PDC \cap$ 平面 $BDC = DC$ ， $PO \subset$ 平面 PDC ，

所以 $PO \perp$ 平面 BDC 。

又 $PO = AO = 2\sin \theta$ ，

$$\text{所以 } V_{P-BDC} = \frac{1}{3} S_{\triangle BDC} \times PO = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times BD \times CD \times \sin \theta \times 2\sin \theta = \frac{2}{3} \sin^2 \theta \leq \frac{2}{3},$$

当且仅当 $\theta = 90^\circ$ 时取最大值，此时 $BD \perp CD$ ， $PD \perp BD$ ，即 BD ， CD ， PD 两两垂直，

设三棱锥 $P-BDC$ 的外接球半径为 R ，则 $2R = \sqrt{PD^2 + BD^2 + CD^2} = \sqrt{4+1+4} = 3$ ，

所以三棱锥 $P-BDC$ 的外接球的表面积为 $4\pi R^2 = 9\pi$ ；

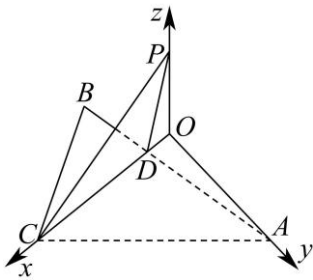
(ii) 如图，以 OC 所在直线为 x 轴， OA 所在直线为 y 轴， OP 所在直线为 z 轴，建立空间直角坐标系，

设 $\angle BDC = \angle ODA = \theta$ ，则 $A(0, 2\sin\theta, 0)$ ， $B(3\cos\theta, -\sin\theta, 0)$ ，
 $C(2\cos\theta + 2, 0, 0)$ ， $P(0, 0, 2\sin\theta)$ ， $D(2\cos\theta, 0, 0)$ ，

$$\text{则} \begin{cases} \overline{DB} = (\cos\theta, -\sin\theta, 0) \\ \overline{DP} = (-2\cos\theta, 0, 2\sin\theta) \end{cases},$$

设平面 PBD 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overline{DB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overline{DP} = 0 \end{cases}$ ，

$$\text{所以} \begin{cases} x\cos\theta - y\sin\theta = 0 \\ -2x\cos\theta + 2z\sin\theta = 0 \end{cases}$$



令 $x = \sin\theta$ ，则 $y = \cos\theta$ ， $z = \cos\theta$ ，

所以 $\vec{n} = (\sin\theta, \cos\theta, \cos\theta)$ ， $\overline{PC} = (2\cos\theta + 2, 0, -2\sin\theta)$ ，

设直线 PC 与平面 PBD 所成角为 α ，则

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= |\cos\langle \overline{PC}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\overline{PC} \cdot \vec{n}|}{|\overline{PC}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{2\sin\theta}{\sqrt{8+8\cos\theta}\sqrt{1+\cos^2\theta}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\theta}\sqrt{1+\cos^2\theta}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{1+\cos^2\theta}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{1+\cos^2\theta}}, \end{aligned}$$

令 $t = 1 - \cos\theta$ ，则 $\cos\theta = 1 - t$ ， $(0 < t < 2)$ ，

$$\text{所以} \frac{1-\cos\theta}{1+\cos^2\theta} = \frac{t}{t^2-2t+2} = \frac{1}{t+\frac{2}{t}-2} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}-2} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}，\text{当且仅当 } t = \sqrt{2} \text{ 时取等号，}$$

$$\text{所以} \sin\alpha \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2}，$$

故直线 PC 与平面 PBD 所成角的正弦值的最大值为 $\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2}$ 。