四川字节精准教育联盟2026年普通高等学校招生全国统一考试冲刺数学试题

一、单选题

1．集合 $A=\left\{x\in \mathbf{Z}\left|(x-2)(x^2-3)=0\right.\right\}$，集合 $B=\left\{x\left|x^2<6\right.\right\}$，则 $A\cap B=$（　）

A．$\left\{-\sqrt{3},\sqrt{3},2\right\}$　B．$\{3,2\}$　C．$\{2\}$　D．$\varnothing$

2．已知复数 $z=\dfrac{\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$，则 $z\cdot\overline{z}=$（　）

A．$\dfrac{1}{5}$　B．$\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$　C．$\dfrac{4}{25}$　D．$\dfrac{4}{25}\mathrm{i}$

3．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项和 $S_4=16$，$a_5-a_3=4$，等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_2=a_2$，$b_3=a_5$，则 $b_6=$（　）

A．81　B．243　C．27　D．729

4．某地区发现一种传染病，初期感染人数增长符合指数函数模型 $y=N_0\mathrm{e}^{kt}$（其中 y 为感染人数，N_0 为初始感染人数，k 为传播系数，t 为发现疫情后的天数，e 为自然对数的底数）．已知发现疫情第 1 天感染人数为 120 人，第 3 天感染人数为 270 人．若感染人数达到 1000 人时需要启动紧急防控预案，则最迟应在发现疫情后第（　）天启动．（参考数据：$\ln 2\approx 0.7$，$\ln 3\approx 1.1$，$\ln 10\approx 2.3$）

A．6　B．7　C．8　D．9

5．$(x-y+3)^5$ 的展开式中，x^3y 的系数为（　）

A．80　B．60　C．-80　D．-60

6．已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，且对任意 $x_1,x_2\in[0,+\infty),x_1\neq x_2$，总有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，则不等式 $f(2m-1)<f(m)$ 的解集为（　）

A．$(-\infty,\dfrac{1}{3})\cup(1,+\infty)$　B．$(1,+\infty)$　C．$(\dfrac{1}{3},1)$　D．$(-\infty,1)$

7．设 O 为坐标原点，F_1,F_2 为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{6}=1$ 的两个焦点，点 P 在 C 上，$\cos\angle F_1PF_2=\dfrac{4}{5}$，则 $|OP|=$（　）

A．$\dfrac{25}{3}$　B．$\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$　C．$\dfrac{14}{5}$　D．$\dfrac{\sqrt{35}}{2}$

8．已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{(a+1)x}+ax$，若对任意 $x\in(0,+\infty),f(x)\geq\ln x$ 恒成立，则实数 a 的最小值为（　）

A．$\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}-1$　B．$\dfrac{1}{\mathrm{e}}-1$　C．$\mathrm{e}-1$　D．e^2-1

二、多选题

9．为测试脑机接口设备的信号识别精度，某科研团队开展高三学生脑机接口操作实验，实验评分部分满分10分．随机抽取10名参与实验的高三学生的操作得分（单位：分）如下：6，7，5，8，6，7，6，8，10，7．下列说法正确的是（　）

A．该样本的70%分位数为7分　　B．该样本的极差为5分

C．用样本均值估计总体均值，其值约为7分　D．用样本方差估计总体方差，其值约为1.8

10．将函数 $y=\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位，再将横坐标伸长到原来的2倍，纵坐标不变，得到函数 $g(x)$ 的图象，则（　）

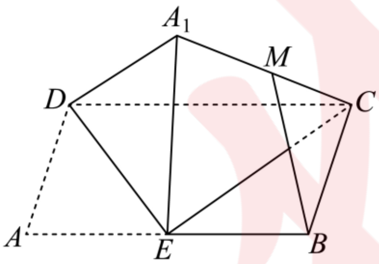
A．函数 $g(x)$ 的图象的一条对称轴为直线 $x=\frac{\pi}{2}$

B．函数 $g(x)$ 的图象的一个对称中心为 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$

C．函数 $g(x)$ 的周期为 $\frac{\pi}{2}$

D．不等式 $g(x)\geq\frac{1}{2}$ 的解集为 $\left[-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\frac{\pi}{3}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$

11．如图，矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=2$，E 为边 AB 的中点，沿 DE 将 $\triangle ADE$ 折起，点 A 折至 A_1 处（$A_1\notin$ 平面 $ABCD$），若 M 为线段 A_1C 的中点，平面 A_1DE 与平面 $DEBC$ 所成锐二面角 α，直线 A_1E 与平面 $DEBC$ 所成角为 β，则在 $\triangle ADE$ 折起过程中，下列说法正确的是（　　）



A．存在某个位置，使得 $BM\perp A_1D$

B．$\triangle A_1EC$ 面积的最大值为 $2\sqrt{2}$

C．$\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\beta$

D．三棱锥 A_1-EDC 体积最大时，三棱锥 A_1-EDC 的外接球的表面积 16π

三、填空题

12．若 $a>0,b>0$，且 $ab=a+b$，则 ab 的最小值是______.

13．已知圆C_1：$x^2-4x+y^2-6y+12=0$，圆C_2：$(x-3)^2+(y-4)^2=9$，M，N分别是圆C_1，C_2上的动点，P为x轴上的动点，则点P到M，N两点的距离之和的最小值为______.

14．有5个相同的球，分别标有数字1，2，3，4，5，从中有放回地随机取3次，每次取1个球.记X为这5个球中至少被取出1次的球的个数，则X的数学期望$E(X)=$________.

四、解答题

15．人教A版选择性必修二第8页中提到：欧拉函数$\varphi(n)\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$的函数值等于所有不超过正整数$n$且与$n$互素的正整数的个数，例如：

$\varphi(1)=1$，$\varphi(2)=1$，$\varphi(3)=2$，$\varphi(4)=2$，$\varphi(8)=4$，$\varphi(9)=6$，$\varphi(27)=18$．正偶数与2^n不互素，所有正奇数与2^n互素，比2^n小的正奇数有2^{n-1}个，所以$\varphi\left(2^n\right)=2^{n-1}$；

(1)求$\varphi(6)$，$\varphi(10)$，$\varphi\left(3^n\right)$的值；

(2)已知数列$\{a_n\}$满足$a_n=\dfrac{1}{2}n\cdot\varphi\left(3^n\right)$，求$\{a_n\}$的前$n$项和$S_n$；

(3)若数列$\left\{\dfrac{4S_n-1}{2n-1}\right\}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$的前$n$项和为$T_n$，对任意$n\in\mathbf{N}^*$，均有$\lambda\cdot\left(T_n+\dfrac{3}{2}\right)-2n+3\geq0$恒成立，求实数$\lambda$的取值范围.

注：两个整数互素是指这两个整数的最大公因数为1.

16．甲、乙两人进行围棋比赛，每局胜者得1分，负者得0分，约定一方比另一方多3分或比赛满7局时结束，并规定：当一方比另一方多3分或比赛满7局时，得分多的一方才算赢．假设在每局比赛中不存在平局，且甲每局获胜的概率为$\dfrac{2}{5}$，各局比赛相互独立．已知前3局中，甲胜1局，乙胜2局，两人又打了X局后比赛结束.

(1)求甲获得这次比赛胜利的概率；

(2)求X的分布列及期望.

17．已知函数$f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}(x>0)$，$g(x)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

(1)令$h(x)=xf(x)$，求$h(x)$在点$(\mathrm{e}-1,h(\mathrm{e}-1))$处的切线方程；

(2)讨论$g(x)$在$(0,1)$上的单调性；

(3)证明：(i）当$x>0$时，$\ln(x+1)>\dfrac{x}{x+1}$

（ii）$1<g\left(x\right)\le 2\ln 2$．

18．已知双曲线 E 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，$M(1,1)$ 是一个定点．

(1)若点 M 在双曲线 E 的渐近线上，求 E 的离心率；

(2)若点 M 在双曲线 E 上，P，Q 是双曲线 E 上的另外两个动点，O 是坐标原点．

（i）当 M 是 $\triangle OPQ$ 的重心且直线 PQ 的斜率为 2 时，求双曲线 E 的方程；

（ii）当 $OP\perp OQ$ 时，求证：存在一个定圆与直线 PQ 相切．

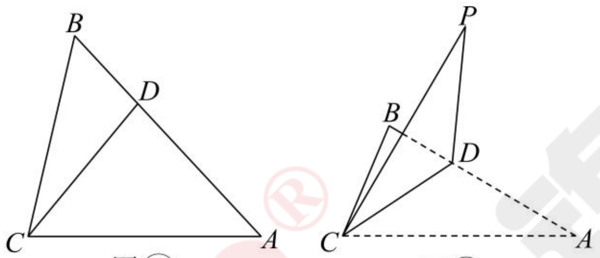
19．如图①，在 $\triangle ABC$ 中，$AB=3$，点 D 是边 AB 上一点，且 $AD=2DB$，$DC=2$．

(1)若 DC 平分 $\angle ACB$ 时，求 $\angle ACB$ 的大小；

(2)如图②，将 $\triangle ADC$ 沿 DC 翻折至 $\triangle PDC$，使平面 $PDC\perp$ 平面 BDC．

（i）当三棱锥 $P-BDC$ 的体积最大时，求三棱锥 $P-BDC$ 的外接球的表面积；

（ii）求直线 PC 与平面 PBD 所成角的正弦值的最大值．



图①　图②