2023 级高三下学期定时练习

数学试题参考答案及评分意见

一、选择题：（每小题 5 分，共 40 分）

1. C；　2. B；　3. B；　4. C；　5. C；　6. D；　7. A；　8. C.

二、选择题：（每小题 6 分，共 18 分）

9. ABD；　10. ACD；　11. ABD.

三、填空题：（每小题 5 分，共 15 分）

12. 2；　13. 16π；　14. 454.

四、解答题：（共 77 分）

15. 解：(1) 由正弦定理 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$，

且 $a\cos B+b\cos A=2c\cos C$，

所以 $\sin A\cos B+\sin B\cos A=2\sin C\cos C$. ……3 分

即 $\sin(A+B)=2\sin C\cos C$，由于 $\sin(A+B)=\sin C>0$，

故 $\cos C=\frac{1}{2}$，因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $C=\frac{\pi}{3}$； ……6 分

(2) 由(1)知，$C=\frac{\pi}{3}$，因为 $a=2b$，$c=\sqrt{3}$，由余弦定理得

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{4b^2+b^2-3}{4b^2}=\frac{1}{2}$， ……9 分

即 $b^2=1$，$b=1$，故 $a=2b=2$. ……11 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 1\times 2=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……13 分

16. 解：(1) 由题知 $\bar{x}=3$，

$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=(1-3)^2+(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(5-3)^2=10$. ……2 分

$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\,\bar{x}\bar{y}=147.86-5\times 3\times 9.5=5.36$. ……4 分

所以 $r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{5.36}{\sqrt{10}\times\sqrt{2.9}}=\frac{5.36}{\sqrt{29}}\approx\frac{5.36}{5.39}\approx 0.99$. ……7 分

因为 y 与 x 的相关系数近似为 0.99,说明 y 与 x 的线性相关程度相当高,从而可以用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系. ……8 分

(2)$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{5.36}{10}=0.536$, ……10 分

$\hat{a}=9.5-0.536\times3=7.892$. ……12 分

所以 y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y}=0.536x+7.892$. ……13 分

将 2026 年对应的年份代码 $x=6$ 代入回归方程得 $y=0.536\times6+7.892=11.108$(万亿千瓦时).

所以预测 2026 年全国全口径发电量为 11.108 万亿千瓦时. ……15 分

17. 解:(1)连接 BD 交 AC 于点 O,因为四边形 $ABCD$ 为菱形,所以对角线 $AC\perp BD$,故 $AC\perp OB$,$AC\perp OP$. ……2 分

又因为 OB,$OP\subset$平面 PBD,$OB\cap OP=O$,所以 $AC\perp$平面 PBD; ……4 分

(2)①由(1)知,$AC\perp OB$,$AC\perp OP$,$OB\subset$平面 ABC,$OP\subset$平面 PAC,

故二面角 $P-AC-B$ 的平面角为$\angle POB$,故 $\cos\angle POB=-\dfrac{1}{3}$. ……6 分

因为在菱形 $ABCD$ 中,$\angle BAD=60°$,$AB=2$,$OB=1$,

所以在$\triangle BOP$ 中,$OB=1$,$OP=1$.

故 $PB^2=1^2+1^2-2\times1\times1\times(-\dfrac{1}{3})=\dfrac{8}{3}$,即 $PB=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$; ……8 分

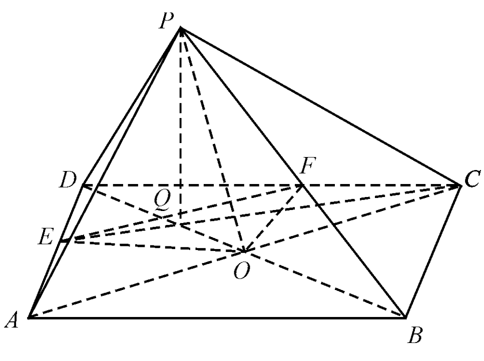
②由①知,$AC\perp$平面 BDP,因为 $AC\subset$平面 $ABCD$,所以平面 $ABCD\perp$平面 BDP,又因为 P 在平面 $ABCD$ 上的射影为 Q,平面 $ABCD\cap$平面 $BDP=BD$,所以 $Q\in BD$.

……10 分

由①知,$\cos\angle POQ=\dfrac{1}{3}$,$OP=1$,故 $OQ=\dfrac{1}{3}$,从而 $DQ=\dfrac{2}{3}$,$BQ=\dfrac{4}{3}$.

又因为$\triangle CQB$ 与$\triangle EQD$ 相似,所以 $DE=\dfrac{1}{2}BC=1$,即 E 为 AD 的中点.

……12 分



又因为 O 为 BD 的中点,所以 $OE/\!/CD$;又因为 $CD\subset$平面 PCD,$OE\not\subset$平面 PCD,所以 $OE/\!/$平面 PCD.

因为 F 为 PB 的中点，所以 $OF /\!/ PD$；又因为 $PD \subset$ 平面 PCD，$OF \not\subset$ 平面 PCD，

所以 $OF /\!/$ 平面 PCD. ……14 分

由于 $OE, OF \subset$ 平面 OEF，$OE \cap OF = O$，故平面 $OEF /\!/$ 平面 PCD，因为 $EF \subset$ 平面 OEF，所以 $EF /\!/$ 平面 PCD. ……15 分

18. 解：(1) 由椭圆 $C: \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ 知 $a=2, b=\sqrt{3}$. ……2 分

故 $c^2 = a^2 - b^2 = 1$，所以 C 的离心率 $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{2}$； ……3 分

(2) 由 $P \in C$，得 $\dfrac{x_0^2}{4} + \dfrac{y_0^2}{3} = 1$，所以 P 满足方程 $\dfrac{x_0 x}{4} + \dfrac{y_0 y}{3} = 1$. ……5 分

联立 $\begin{cases} y_0 y = 3 - \dfrac{3}{4} x_0 x, \\ 3x^2 + 4y^2 - 12 = 0 \end{cases}$ 得 $3{y_0}^2 x^2 + 4(3 - \dfrac{3}{4} x_0 x)^2 - 12{y_0}^2 = 0$.

即 $(\dfrac{9}{4}{x_0}^2 + 3{y_0}^2)x^2 - 18x_0 x + 36 - 12{y_0}^2 = 0$，

即 $(3{x_0}^2 + 4{y_0}^2)x^2 - 24x_0 x + 16(3 - {y_0}^2) = 0$.

由 $3{x_0}^2 + 4{y_0}^2 = 12$，即 $3x^2 - 6x_0 x + 4(3 - {y_0}^2) = 0$. ……8 分

因为 $\Delta = 36{x_0}^2 - 48(3 - {y_0}^2) = 36{x_0}^2 + 48{y_0}^2 - 144 = 12(3{x_0}^2 + 4{y_0}^2 - 12) = 0$，

所以 l 为 C 在 P 处的切线. ……10 分

②由①知，l 的方程为 $\dfrac{x_0 x}{4} + \dfrac{y_0 y}{3} = 1$，当 $x=2$ 时，$y_Q = \dfrac{6 - 3x_0}{2y_0}$. ……12 分

由于 $F(-1,0)$，故直线 FQ 的斜率 $k_{FQ} = \dfrac{2 - x_0}{2y_0}$.

由于 $A(2,0)$，故直线 AP 的斜率 $k_{AP} = \dfrac{y_0}{x_0 - 2}$.

所以 $k_{RA} \cdot k_{RF} = k_{FQ} \cdot k_{AP} = -\dfrac{1}{2}$.

设 $R(x,y)$，则 $\dfrac{y}{x-2} \cdot \dfrac{y}{x+1} = -\dfrac{1}{2}$，

化简得 R 的轨迹方程为 $y^2 = -\dfrac{1}{2}(x+1)(x-2)(-1 < x < 2)$. ……14 分

$|OR| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - \dfrac{1}{2}(x+1)(x-2)} = \sqrt{\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x + 1}$， ……16 分

所以当 $x = -\dfrac{1}{2}, y = \pm\dfrac{\sqrt{10}}{4}$，即 $R(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{10}}{4})$ 或 $R(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{10}{4})$ 时，

$|OR|$ 取得最小值 $\frac{\sqrt{14}}{4}$. ……17 分

19. 解：(1)设函数 $h(x)=\sin x-x, x\in(0,+\infty)$, ……… 1 分

则 $h'(x)=\cos x-1\leqslant 0$，故 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减. ……… 2 分

所以 $h(x)<h(0)=0$，即当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)=\sin x<x$. ……… 3 分

(2)① 因为 $g(x)=kf(x)-e^x-\ln(x+1)+1=k\sin x-e^x-\ln(x+1)+1$,

所以 $g'(x)=k\cos x-e^x-\frac{1}{x+1}$. ……… 4 分

当 $k\leqslant 0$ 时，$g'(x)\leqslant 0$ 在 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 上恒成立，故 $g(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减，所以 $g(x)$ 无极值； ……… 5 分

当 $k>0$ 时，令 $g'(x)=\tau(x)$，则 $\tau'(x)=-k\sin x-e^x+\frac{1}{(x+1)^2}<\frac{1}{(x+1)^2}-e^x$

$<\frac{1}{(x+1)^2}-1<0$ 在 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 上恒成立，故 $\tau(x)$ 在 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减.

若 $0<k\leqslant 2$，$\tau(x)<\tau(0)=k-2\leqslant 0$，即 $g'(x)<0$，故 $g(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减，所以 $g(x)$ 无极值； ……… 7 分

若 $k>2$，因为 $\tau(0)=k-2>0$，$\tau(\frac{\pi}{2})<0$，所以存在 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $\tau(\alpha)=0$，且当 $x\in(0,\alpha)$ 时，$\tau(x)>0$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在区间 $(0,\alpha)$ 上单调递增；当 $x\in(\alpha,\frac{\pi}{2})$ 时，$\tau(x)<0$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在区间 $(\alpha,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减. 故 $g(x)$ 在 $x=\alpha$ 处取得极大值，无极小值. ……… 9 分

综上所述，k 的取值范围是 $(2,+\infty)$. ……… 10 分

②由①知，$k>2$，且 $g(x)$ 在区间 $(0,\alpha)$ 上单调递增，在区间 $(\alpha,\frac{\pi}{2})$ 上单调递减.

当 $x\in[\frac{\pi}{2},\pi)$ 时，$g'(x)=k\cos x-e^x-\frac{1}{x+1}<0$，故 $g(x)$ 在 $[\alpha,\pi)$ 上单调递减.

……… 11 分

因为 $g(\alpha)>g(0)=0$，$g(\pi)=-e^{\pi}-\ln(\pi+1)+1<0$,

由零点存在定理知，存在唯一 $\beta\in(0,\pi)$，使 $g(\beta)=0$. ……… 12 分

由 $g'(\alpha)=k\cos\alpha-e^{\alpha}-\frac{1}{\alpha+1}=0$，得 $k\cos\alpha=e^{\alpha}+\frac{1}{\alpha+1}$.

所以 $g(2\alpha)=k\sin2\alpha-e^{2\alpha}-\ln(2\alpha+1)+1=(k\cos\alpha)2\sin\alpha-e^{2\alpha}-\ln(2\alpha+1)+1$

$=2\sin\alpha(e^{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha+1})-e^{2\alpha}-\ln(2\alpha+1)+1.$ ……… 13 分

由(1)知，$\sin\alpha<\alpha$，且 $e^{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha+1}>0$，故 $g(2\alpha)<2\alpha(e^{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha+1})-e^{2\alpha}-\ln(2\alpha+1)+1$

$=\dfrac{2\alpha}{\alpha+1}-\ln(2\alpha+1)-e^{\alpha}(e^{\alpha}-e^{-\alpha}-2\alpha).$ ……… 14 分

令 $m(x)=\dfrac{2x}{x+1}-\ln(2x+1)$，$x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，则

$m'(x)=\dfrac{2}{(x+1)^2}-\dfrac{2}{2x+1}=\dfrac{-2x^2}{(2x+1)(x+1)^2}<0$，

故 $m(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递减，从而 $m(x)<m(0)=0$，即 $\dfrac{2\alpha}{\alpha+1}-\ln(2\alpha+1)<0.$

……… 15 分

令 $n(x)=e^{x}-e^{-x}-2x$，$x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，则 $n'(x)=e^{x}+e^{-x}-2\geqslant0$，故 $n(x)$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 上单调递增，所以 $n(x)>n(0)=0$，即 $e^{\alpha}-e^{-\alpha}-2\alpha>0$，$-e^{\alpha}(e^{\alpha}-e^{-\alpha}-2\alpha)<0.$

……… 16 分

故 $g(2\alpha)<0=g(\beta)$. 由于 $g(x)$ 在 $[\alpha,\pi)$ 上单调递减，所以 $\beta<2\alpha$. ……… 17 分