2023级高三下学期定时练习

数　学

本卷满分150分，练习时间120分钟。

注意事项：

1. 答题前，务必将自己的姓名、考籍号填写在答题卡规定的位置上。
2. 答选择题时，必须使用2B铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。
3. 答非选择题时，必须使用0.5毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上。
4. 所有题目必须在答题卡上作答，在本卷上答题无效。
5. 定时练习结束后，只将答题卡交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{0,1,2\}$，$B=\{x\mid 2^x<3\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{0\}$　　B. $\{1\}$　　C. $\{0,1\}$　　D. $\{0,1,2\}$

2. 若复数 z 满足 $z(1+\mathrm{i})=2$，则 $|z|=$

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. 1　　D. 2

3. 已知点 $A(\frac{\pi}{4},0)$，$B(\frac{3\pi}{4},0)$ 为函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)$ 图象上的两个相邻对称中心，则 $f(x)$ 的最小正周期为

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. π　　C. $\frac{3\pi}{2}$　　D. 2π

4. 某校高三年级有男生300人，女生200人，按性别进行分层，用分层抽样的方法从该校全体高三学生中抽取一个容量为100的样本，如果样本按比例分配，得到男生、女生的平均身高分别为175 cm和165 cm，则估计该校高三年级学生的平均身高为

A. 169 cm　　B. 170 cm　　C. 171 cm　　D. 172 cm

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_na_{n+1}=2a_n-2a_{n+1}$，则 $a_7=$

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{7}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{2}{9}$

6. 若圆 C 过点 $M(0,2)$，且与 x 轴相切，则圆心 C 的轨迹方程为

A. $x^2=4y$　　B. $x^2=8y$　　C. $x^2=4(1-y)$　　D. $x^2=4(y-1)$

7. 已知 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，则 $\cos2\alpha=$

A. $-\frac{3}{5}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $-\frac{24}{25}$　　D. $\frac{24}{25}$

8. 若函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-m(m+2)x+1$ 在区间 $(-7,7)$ 上有最大值，则正整数 m 的值有

A. 3 个　　B. 4 个　　C. 5 个　　D. 6 个

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$，则

A. $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2$　　B. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$

C. $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\parallel(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$　　D. $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{4}$

10. 已知双曲线 $\frac{x^2}{m}-\frac{y^2}{m+2}=1(m>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，P 为双曲线上一点，若 $A(3,2)$，$B(2,3)$，$C(-2,3)$，$D(-2,-3)$ 中有且仅有 3 个点在双曲线上，则

A. 双曲线的渐近线斜率为 $\pm\sqrt{3}$　　B. $|CF_1|+|CF_2|=2$

C. $\triangle BDF_1$ 的面积为 6　　D. $|AP|+|PF_2|$ 的最小值为 $\sqrt{29}-2$

11. 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+f(x+4)=0$，$f(2x+2)$ 是偶函数，$f(1)=1$，则

A. $f(-3)=-1$

B. $f(x)$ 是奇函数

C. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称

D. $\sum\limits_{k=1}^{100}kf(2k-1)=-100$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知 a,b,c 成等比数列，且 $a<b<c$，若 $a+b+c=14$，$abc=64$，则 $a=$________.

13. 已知圆台的底面半径分别为 1 和 2，高为 $\sqrt{3}$，底面圆周均在球 O 的球面上，则球 O 的表面积为________.

14. 已知集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，若函数 $f:A\to B$ 满足：$\forall x_1,x_2\in A$，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant2$，则符合条件的函数共有________个.

四、解答题：本题共5小题，共77分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（本小题满分13分）

在△ABC中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且$a\cos B+b\cos A=2c\cos C$.

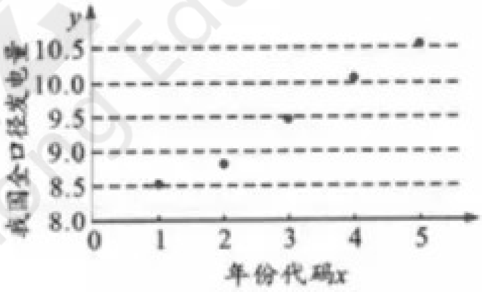
(1)求C；

(2)若$a=2b$，$c=\sqrt{3}$，求△ABC的面积.

16.（本小题满分15分）

2025年，我国能源安全保障能力再上新台阶，全口径发电量占全球总发电量的30.4%，稳居世界第一，为智能算力的爆发性电力需求持续提供稳定保障．某学习小组收集了2021年至2025年我国全口径发电量相关数据，根据数据制作了如下数据表格和散点图.

年　份	2021	2022	2023	2024	2025
年份代码x	1	2	3	4	5
我国全口径发电量y（单位：万亿千瓦时）	8.52	8.85	9.46	10.09	10.58



注：年份代码1–5分别对应2021–2025

(1)由散点图看出，可用线性回归模型拟合y与x的关系，请用相关系数加以说明；

(2)建立y关于x的经验回归方程，并预测2026年我国全口径发电量.

参考数据：$\bar{y}=9.5$，$\sum_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2=2.9$，$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=147.86$，$\sqrt{29}\approx5.39$.

参考公式：回归方程$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为：

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2},\ \hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}，相关系数r=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}.$$

17.（本小题满分 15 分）

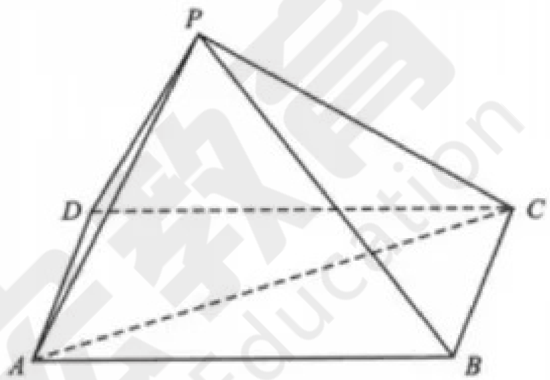
如图，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=60^\circ$，$AB=2$，将$\triangle ABC$ 沿 AC 翻折至$\triangle APC$，连接 PD，PB 构成四棱锥 $P-ABCD$.

(1)证明：$AC\perp$平面 PBD；

(2)若二面角 $P-AC-B$ 的余弦值为$-\dfrac{1}{3}$.

①求 PB 的长；

②设 P 在平面 $ABCD$ 上的射影为 Q，直线 CQ 与 AD 交于 E 点，F 为 PB 的中点，证明：$EF\parallel$平面 PCD.



18.（本小题满分 17 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的左焦点为 F.

(1)求 C 的离心率；

(2)$P(x_0,y_0)(y_0\neq 0)$为 C 上一点，C 在 P 处的切线为 l.

①证明：l 的方程为$\dfrac{x_0x}{4}+\dfrac{y_0y}{3}=1$；

②设 C 的右顶点为 A，l 交直线 $m:x=2$ 于点 Q，PA 与 FQ 交于点 R，O 为坐标原点，求$|OR|$的最小值.

19.（本小题满分 17 分）

设函数 $f(x)=\sin x$.

(1)当 $x>0$ 时，证明：$f(x)<x$；

(2)已知函数 $g(x)=kf(x)-e^x-\ln(x+1)+1$ 在区间$(0,\dfrac{\pi}{2})$内存在极值点 α.

①求 k 的取值范围；

②是否存在 $\beta\in(0,\pi)$，使 $g(\beta)=0$？若存在，比较 β 与 2α 的大小；若不存在，请说明理由.