高 2026 届适应性训练试题

数学答案及评分意见

一、单选题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. A　2. C　3. D　4. C　5. C　6. D　7. B　8. B

二、多项选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项是符合题目要求的. 全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. AC　10. BCD　11. ACD

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. -80　　13. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$　　14. 5

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 解：(1) 由频率分布直方图得所有矩形面积和为 1

即 $10\times(0.010+m+0.04+0.015+0.005)=1$

解得 $m=0.03$ ………………………………………………………… 4 分

(2) 年龄在 $[15,35)$ 内的频率为 $(0.01+0.03)\times10=0.4$

则抽取的样本中该区间人数为 $20\times0.4=8$ 人 ……………………………… 8 分

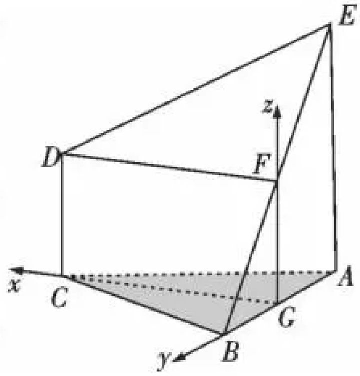
(3) 设这 200 名中国 AI 大模型用户年龄的平均数为 $\bar{x}$

由频率分布直方图计算平均数

即 $\bar{x}=20\times0.1+30\times0.3+40\times0.4+50\times0.15+60\times0.05=37.5$(岁)

故这 200 名中国 AI 大模型用户年龄的平均数为 37.5 岁 ……………… 13 分

16. 解：(1) 证明：取 AB 的中点 G，连接 CG,FG ……………… 2 分



$\because F$ 是 EB 的中点，$\therefore FG/\!/EA, FG=\frac{1}{2}EA$

$\because EA$ 和 DC 都垂直于平面 ABC

$\therefore EA/\!/DC$ ………………………………………………… 4 分

$\because EA=2DC$

$\therefore FG/\!/DC, FG=DC$

$\therefore$ 四边形 $CDFG$ 为平行四边形，从而 $DF/\!/CG$ ……………… 5 分

$\because DF\not\subset$ 平面 ABC，$CG\subset$ 平面 ABC

$\therefore DF/\!/$ 平面 ABC ………………………………………………… 7 分

(2) $\because \triangle ABC$ 是正三角形且 G 是 AB 的中点

$\therefore CG\perp AB$

以 GC 为 x 轴，GB 为 y 轴，GF 为 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 ………… 9 分

$F(0,0,1),D(\sqrt{3},0,1),E(0,-1,2)$，则 $\overrightarrow{FD}=(\sqrt{3},0,0),\overrightarrow{FE}=(0,-1,1)$

设平面 DEF 的法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{FD}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0\end{cases}$，令 $y=1$，得 $\vec{n}=(0,1,1)$ ……………………… 12 分

又平面 ABC 的法向量 $\vec{m}=(0,0,1)$ ……………………………………… 13 分

设平面 DEF 与平面 ABC 所成夹角为 θ，则

$$\cos\theta=|\cos<\vec{m},\vec{n}>|=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore$ 平面 DEF 与平面 ABC 所成夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$ ………………………………… 15 分

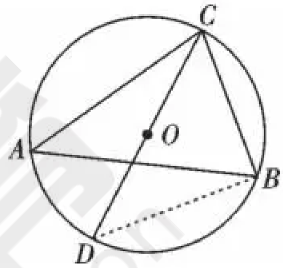
17. 解:(1)正弦定理为:$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

证明法 1:见教材必修二第六章 46 页的向量法证明

证明法 2:如图,设$\triangle ABC$ 外接圆的直径为 $2R$

①当$\triangle ABC$ 为锐角三角形时,$\triangle ABC$ 的外接圆圆心 O 在$\triangle ABC$ 内部

连接 CO 并延长交圆于 D,连接 BD,则$\angle A=\angle D$



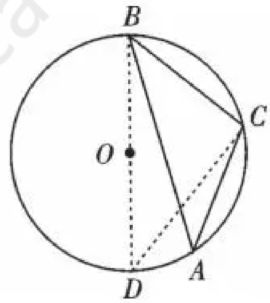
易知$\triangle BDC$ 为直角三角形,则 $\sin A=\sin D=\frac{BC}{CD}=\frac{a}{2R}$

所以$\frac{a}{\sin A}=2R$,同理$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

故有$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ ……………………………………… 5 分

②当$\triangle ABC$ 为钝角三角形时,$\triangle ABC$ 的外接圆圆心 O 在$\triangle ABC$ 外部

连接 BO 并延长交圆于 D,连接 CD, 则$\angle A=\angle D$



同理易知$\triangle DBC$ 为直角三角形,则 $\sin A=\sin D=\frac{BC}{BD}=\frac{a}{2R}$

所以$\frac{a}{\sin A}=2R$,同理$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

故有$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

当$\triangle ABC$ 为直角三角形时,由锐角三角函数定义知$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

综上,任意$\triangle ABC$ 外接圆的直径 $2R$,都有$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ ……………………… 8 分

(2)在$\triangle ABP$ 中,由正弦定理得$\frac{BP}{\sin\angle BAP}=\frac{AP}{\sin\angle ABP}$,则 $\sin\angle ABP=\frac{1}{2}$ …………… 10 分

于是由$\angle ABP$ 为锐角知$\angle ABP=30°$……………………………………………………… 11 分

又因为$\angle ABC=90°$,得$\angle CBP=60°$ ………………………………………………… 12 分

在$\triangle CBP$ 中,由余弦定理知 $CP^2=BP^2+BC^2-2BP\cdot BC\cdot\cos\angle CBP$

即 $2=1+BC^2-BC$,得 $BC=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ …………………………………………………… 14 分

所以 $S_{\triangle BCP}=\frac{1}{2}BC\cdot BP\cdot\sin\angle CBP=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{8}$ ……………………………………… 15 分

18. 解:(1)当 $b=0$ 时,曲线 τ 的方程为:$y^2=ax$

由抛物线 τ 上有一点 $P(1,2)$,知 $a=4$ ………………………………………………… 2 分

则抛物线 τ 为 $y^2=4x$,焦点 F 的坐标为$(1,0)$

由抛物线定义知 $PF=x_p+1=2$ ……………………………………………………… 4 分

(2)当 $a=b=2$ 时,曲线 τ 的方程为 $y^2=\begin{cases}4x, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

曲线 τ 由 x 轴负半轴及抛物线 $y^2=4x$ 构成,要使直线 $l:y=kx+1$ 与曲线 τ 有三个不同的交点,必有 $k>0$ ……………………………………………………………………… 6 分

由直线与 x 轴负半轴有一个交点知直线与抛物线 $y^2=4x$ 必有两个交点

联立 $\begin{cases}y=kx+1\\y^2=4x\end{cases}$，消去 y 得：$(kx+1)^2=4x\Rightarrow k^2x^2+(2k-4)x+1=0$

则 $\triangle=(2x-4)^2-4k^2=16-16k>0$，得 $k<1$

因此 k 的取值范围为 $(0,1)$ ………………………………………………………………………… 9 分

(3) 曲线 τ 的方程为 $y^2=\begin{cases}4x, & x\geqslant 0\\(2a-4)x, & x<0\end{cases}$

由 $a+b=4$ 且 $b>a>0$，可得 $a\in(0,2)$ ……………………………………………………… 10 分

因此 $a-b=2a-4\in(-4,0)$

要使直线 $l:y=kx+1$ 与曲线 $\tau:y^2=\begin{cases}4x, & x\geqslant 0\\(2a-4)x, & x<0\end{cases}$ 有三个交点，分以下两种情况讨论：

情况①：直线 l 与 $y^2=4x$ 相切，与 $y^2=(2a-4)x$ 相交于两点

此时 $k>0$ ……………………………………………………………………………………………… 11 分

由(2)知，直线 l 与 $y^2=4x$ 相切时，$k=1$，不妨设切点横坐标为 x_3

由 x_3 是方程 $x^2-2x+1=0$ 的根，即 $x_3=1$

联立 $\begin{cases}y=kx+1\\y^2=(2a-4)x\end{cases}$，消去 y 得：$k^2x^2+(2k-2a+4)x+1=0$

将 $k=1$ 代入，得：$x^2+(6-2a)x+1=0$，$\triangle=(6-2a)^2-4=4(a-2)(a-4)>0$

不妨设直线 l 与 $y^2=(2a-4)x$ 相交的两点的横坐标分别为 x_1,x_2

由韦达定理：$\begin{cases}x_1+x_2=2a-6\\x_1x_2=1\end{cases}$

则 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}+\dfrac{1}{x_3}=(2a-6)+1=2a-5$

由 $a\in(0,2)$，得 $2a-5\in(-5,-1)$ ……………………………………………………………… 14 分

情况②：直线 l 与 $y^2=4x$ 相交于两点，与 $y^2=(2a-4)x$ 相切

此时 $k<0$

联立直线 l 与 $y^2=(2a-4)x$，得 $k^2x^2+(2k-2a+4)x+1=0$

由相切知 $\triangle=(2k-2a+4)^2-4k^2=(4-2a)^2+4(4-2a)k=0$

由 $4-2a\neq 0$，得 $4-2a+4k=0$，即 $k=\dfrac{a-2}{2}$

不妨设直线 l 与 $y^2=(2a-4)x$ 的切点的横坐标为 x_1

由韦达定理知 $x_1^2=\dfrac{1}{k^2}$，故 $x_1=\dfrac{1}{k}$，因此 $\dfrac{1}{x_1}=k=\dfrac{a-2}{2}$

联立直线 $l:y=\dfrac{a-2}{2}x+1$ 与 $y^2=4x$，得 $\dfrac{(a-2)^2}{4}x^2+(a-6)x+1=0$

$\triangle=(a-6)^2-(a-2)^2=(2a-8)(-4)>0$

设直线 l 与 $y^2=4x$ 相交的两点的横坐标分别为 x_2、x_3

则 $x_2+x_3=\dfrac{4(6-a)}{(a-2)^2}$，$x_2x_3=\dfrac{4}{(a-2)^2}$，知 $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{x_2+x_3}{x_2x_3}=\dfrac{a-2}{2}+6-a=5-\dfrac{a}{2}$

由 $a\in(0,2)$，得 $5-\dfrac{a}{2}\in(4,5)$

综合①②两种情况，$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}$ 的取值范围为 $(-5,-1)\cup(4,5)$ ……………………… 17 分

19. 解：(1) 当 $a=2$ 时，$f(x)=e^x-x^2-(e-2)x-1$，$x\in(0,1)$

①因为$f'(x)=e^x-2x-(e-2)$，$f'(\frac{1}{2})=\sqrt{e}-e+1$

所以函数在$x=\frac{1}{2}$处的切线斜率为$\sqrt{e}-e+1$ ………………………………………… 3 分

由$f(\frac{1}{2})=\sqrt{e}-\frac{e}{2}-\frac{1}{4}$，

知函数在$x=\frac{1}{2}$处的切线方程为$y=(\sqrt{e}-e+1)x+\frac{\sqrt{e}}{2}-\frac{3}{4}$ ………………………… 5 分

②因为$f(x)=e^x-x^2-(e-2)x-1$，所以$f'(x)=e^x-2x-(e-2)$，$f''(x)=e^x-2$

令$f''(x)=0$，得$x=\ln 2$，

于是$f'(x)$在$(0,\ln 2)$单调递减，在$(\ln 2,1)$单调递增

由$f'(0)=3-e>0$，$f'(1)=0$，$f'(\ln 2)=4-2\ln 2-e<0$

知存在唯一零点x_0使得$f'(x_0)=0$

即$f(x)$在$(0,x_0)$单调递增，在$(x_0,1)$单调递减，

而$f(0)=f(1)=0$

所以$f(x)>0$在区间$(0,1)$内恒成立，得证 ……………………………………………… 10 分

(2)当$a\geqslant 2$时，$f(x)=e^x-x^a-(e-2)x-1\geqslant e^x-x^2-(e-2)x-1$

由②知$f(x)>0$，即此时$f(x)$无零点

当$a\leqslant 1$时，$f(x)=e^x-x^a-(e-2)x-1\leqslant e^x-(e-1)x-1$

令$h(x)=e^x-(e-1)x-1$，$h'(x)=e^x-e+1$

由$h'(x)$在$(0,1)$单调递增，且$h'(x)=e^x-e+1$，$h'(0)<0$，$h'(1)>0$

所以存在唯一零点t使得$h'(t)=0$，则$h(x)$在$(0,t)$单调递减，$(t,1)$单调递增

而$h(0)=h(1)=0$，所以$h(x)<0$，知$f(x)<0$，即此时$f(x)$无零点 ………………… 13 分

下证：当$a\in(1,2)$时，$f(x)$在区间$(0,1)$内有零点，并且零点是唯一的

$f(x)=e^x-x^a-(e-2)x-1$，$f(0)=f(1)=0$

$f'(x)=e^x-ax^{a-1}-(e-2)$，故$f'(0)=3-e>0$，$f'(1)=2-a>0$

又$f''(x)=e^x-a(a-1)x^{a-2}$，得$f'''(x)=e^x-a(a-1)(a-2)x^{a-3}>0$，

于是$f''(x)$在区间$(0,1)$内单调递增，有唯一零点x_0为$f'(x)$的最小值点，

即$f'(x)_{\min}=f'(x_0)$

我们断言：$f'(x_0)<0$，否则$f'(x_0)\geqslant 0$，从而$f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$在区间$[0,1]$上单调递增，与$f(0)=f(1)$矛盾，现列表如下：

x	0	$(0,x_0)$	x_0	$(x_0,1)$	1
$f''(x)$		−	0	+	+
$f'(x)$	+	单调递减，正变负，有唯一零点x_1	−	单调递增，负变正，有唯一零点x_2	+

再列表如下：

x	0	$(0,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,1)$	1
$f'(x)$	+	+	0	−	0	+	+
$f(x)$	0	单调递增，+	+	单调递减，正变负，有唯一零点x_3	−	单调递增，−	0

综上，$a\in(1,2)$，$f(x)$在区间$(0,1)$内的零点是唯一的 ………………………………… 17 分