

2026 年高考适应性考试

数学参考答案和评分标准

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

1. A 2. C 3. B 4. D 5. A 6. B 7. C 8. D

二、选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 全部选对的得 6 分，选对但不全的得部分分，有选错的得 0 分.

9. ABD 10. ACD 11. ACD

三、填空题：本题共 3 个小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. $\frac{1}{4}$; 13. -2; 14. 28, $3^{99} + 1$

四、解答题：本题共 5 小题，第 15 题 13 分，第 16、17 小题 15 分，第 18、19 小题 17 分，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (1) $\because c \sin B = b \cos(C - \frac{\pi}{6}),$

由正弦定理得： $\sin C \sin B = \sin B \cos(C - \frac{\pi}{6}),$ 又 $\sin B \neq 0,$ 1 分

$\therefore \sin C = \cos(C - \frac{\pi}{6}),$ 2 分

$\therefore \sin C = \cos C \cos \frac{\pi}{6} + \sin C \sin \frac{\pi}{6},$ 4 分

$\therefore \tan C = \sqrt{3},$ 又 $C \in (0, \pi),$ 则 $C = \frac{\pi}{3};$ 6 分

(2) 方法一：在 $\triangle BCD$ 中， $\because BD = CD,$ 可得 $\angle BCD = B, \angle ADC = 2B,$

又 $\because C = \frac{\pi}{3},$ 7 分

$\therefore \angle ACD = \frac{\pi}{3} - B, \sin A = \sin(\pi - C - B) = \sin(\frac{\pi}{3} + B),$ 8 分

又在 $\triangle ACD$ 中，由正弦定理得： $\frac{AD}{\sin(\frac{\pi}{3} - B)} = \frac{CD}{\sin A},$ 且 $CD = 2AD,$

$\therefore \frac{AD}{\sin(\frac{\pi}{3} - B)} = \frac{2AD}{\sin(\frac{\pi}{3} + B)},$ 9 分

$\therefore \tan B = \frac{\sqrt{3}}{3},$ 则 $B = \frac{\pi}{6},$ 由 (1) 知： $C = \frac{\pi}{3},$ 则 $A = \frac{\pi}{2},$ 11 分

$\therefore \frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{1} = \frac{1}{2}.$ 13 分

方法二：设 $AD=x$ ，则 $BD=CD=2x$ ，……………7分

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得： $9x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \frac{\pi}{3}$ ，

$\therefore 9x^2 = a^2 + b^2 - ab$ ①，……………8分

又 $\overline{CD} = \frac{2}{3}\overline{CA} + \frac{1}{3}\overline{CB}$ ，……………9分

平方得： $4x^2 = \frac{4}{9}b^2 + \frac{1}{9}a^2 + \frac{4}{9}ab \cdot \frac{1}{2}$ ，……………10分

$\therefore 4x^2 = \frac{4}{9}b^2 + \frac{1}{9}a^2 + \frac{2}{9}ab$ ②，……………11分

由①消去 x^2 得： $a^2 = 2ab$ ，又 $a \neq 0$ ，所以 $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ 。……………13分

16. 解：(1) $\because l$ 过 $F_1(-c, 0)$ 时， $\triangle ABF_2$ 的周长为 8，则 $4a = 8$ ， $a = 2$ ，……………2分

设 $\angle AMO = \theta$ ，则 $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta = \frac{1}{3}$ ，……………4分

$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，……………5分

又 $\sin \theta = \frac{c}{\sqrt{c^2 + 4}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，则 $c = \sqrt{2}$ ，……………6分

又 $a^2 = b^2 + c^2$ ，可得： $a^2 = 4$ ， $b^2 = 2$ ，……………7分

$\therefore E$ 的方程为： $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ ；……………8分

(2) 已知直线 l 的方程为： $y = kx + 2$ ，设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，……………9分

联立 $\begin{cases} y = kx + 2 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}$ ，消 y 整理得： $(2k^2 + 1)x^2 + 8kx + 4 = 0$ ，……………10分

则： $x_1 + x_2 = \frac{-8k}{2k^2 + 1}$ ， $x_1 \cdot x_2 = \frac{4}{2k^2 + 1}$ ，……………11分

$\therefore k_1 + k_2 = \frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} = \frac{(kx_2 + 2)x_1 + (kx_1 + 2)x_2}{x_1 x_2}$ ……………12分

$= \frac{2kx_1 x_2 + 2(x_1 + x_2)}{x_1 x_2}$ ……………13分

$= 2k - 4k = -2k$ ，……………14分

$\therefore k_1, -k, k_2$ 成等差数列。……………15分

17. 解：方法一：(1) 设 $\overrightarrow{AA_1} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c}$,1 分

$$\begin{aligned} \because \overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{A_1F} - \overrightarrow{A_1E} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) - (\overrightarrow{AE} - \mathbf{a}) \\ &= \frac{1}{3}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) - \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) + \mathbf{a} = \mathbf{a} - \frac{1}{6}(\mathbf{b} + \mathbf{c}), \end{aligned} \dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BC} &= [\mathbf{a} - \frac{1}{6}(\mathbf{b} + \mathbf{c})] \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \frac{1}{6}(\mathbf{c}^2 - \mathbf{b}^2) \\ &= 1 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ - 1 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ - 0 = 0, \end{aligned} \dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{又 } \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AB} = [\mathbf{a} - \frac{1}{6}(\mathbf{b} + \mathbf{c})] \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \frac{1}{6}(\mathbf{b}^2 + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = 1 - \frac{1}{6}(4 + 2) = 0,$$

$\therefore EF \perp BC$, $EF \perp AB$,7 分

又 $\because AB \cap BC = B$,

$\therefore EF \perp$ 平面 ABC ;8 分

(2) $\because EF \perp$ 平面 ABC , 以 E 为原点, 建立如图所示的空间直角坐标系 $Exyz$,

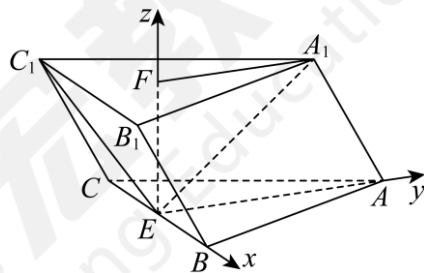
$$\therefore F(0, 0, \frac{\sqrt{6}}{3}), A_1(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}),$$

$$C(-1, 0, 0), A(0, \sqrt{3}, 0),$$

设 $C_1(x_0, y_0, z_0)$, 由 $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AA_1}$,

$$\text{可得 } (x_0 + 1, y_0, z_0) = (0, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}),$$

$$\therefore C_1(-1, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}), \dots\dots 10 \text{ 分}$$



易知平面 FA_1E 的一个法向量 $\overrightarrow{EB} = (-1, 0, 0)$, 11 分

设平面 A_1EC_1 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 由 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{EC_1} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{EA_1} = 0 \end{cases}$,

$$\text{得 } \begin{cases} (x, y, z) \cdot (-1, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}) = 0 \\ (x, y, z) \cdot (0, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}) = 0 \end{cases}, \text{ 可得一个法向量 } \mathbf{n} = (-\sqrt{3}, 1, -\sqrt{2}), \dots\dots 13 \text{ 分}$$

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{EB}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{EB} \cdot \mathbf{n}}{|\overrightarrow{EB}| |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \dots\dots 14 \text{ 分}$$

\therefore 平面 FA_1E 与平面 A_1EC_1 的夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 15 分

方法二：(1) 连接 A_1B , A_1C , 易知 $\triangle AA_1B \cong \triangle AA_1C$,1 分

$A_1A = 1$, $AB = AC = 2$, $\angle BAA_1 = \angle CAA_1 = 60^\circ$, 由余弦定理,

$\therefore \angle AA_1B = \angle AA_1C = 90^\circ$, 且 $A_1B = A_1C = \sqrt{3}$,2 分

由 E 为 BC 中点, 则 $BC \perp A_1E$,

延长 A_1F 交 B_1C_1 于点 G , 则 $A_1G \perp B_1C_1$, 则 $A_1G \perp BC$, $A_1E \cap A_1G = A_1$,

∴ $BC \perp$ 平面 A_1GE , $EF \subseteq$ 平面 A_1GE ,

∴ $BC \perp EF$, $EF \perp B_1C_1$, 4 分

在 $Rt\triangle A_1BE$ 中, 可得 $A_1E = \sqrt{2}$, 5 分

在 $\triangle A_1EG$ 中, $EG = 1$, $A_1G = \sqrt{3}$, 则 $A_1G^2 = EG^2 + A_1E^2$,

∴ $A_1E \perp EG$, 6 分

又 F 为 A_1G 上靠近点 G 的一个三等分点, $FG = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $A_1F = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

可得 $EG^2 - GF^2 = A_1E^2 - A_1F^2 = \frac{2}{3}$, ∴ $EF \perp A_1G$, 7 分

又 $A_1G \cap B_1C_1 = G$, 则 $EF \perp$ 平面 $A_1B_1C_1$,

∴ $EF \perp$ 平面 ABC ; 8 分

(2) 由 (1) 知 $GE = AA_1 = 1$, $A_1E = \sqrt{2}$, $A_1G = \sqrt{3}$,

∴ $GE^2 + A_1E^2 = A_1G^2$, 则 $GE \perp A_1E$, 10 分

又由 (1) 知 $BC \perp A_1E$, $BC \cap GE = E$, $BC \subseteq$ 平面 GEC_1 , $GE \subseteq$ 平面 GEC_1 ,

∴ $A_1E \perp$ 平面 GEC_1 ,

又 $GE \subseteq$ 平面 GEC_1 , 12 分

∴ $C_1E \perp A_1E$, 13 分

∴ $\angle GEC_1$ 为平面 A_1EF 与平面 A_1GE 的夹角, 14 分

在 $Rt\triangle EGC_1$ 中, $\cos \angle GEC_1 = \frac{GE}{C_1E} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 15 分

18. 解: (1) 若 $n=4$, $k=2$ 时, $X=0, 1, 2$, 1 分

$P(X=0) = \frac{C_4^2 \cdot C_2^2}{C_4^2 \cdot C_4^2} = \frac{1}{6}$; 2 分

$P(X=1) = \frac{C_4^2(C_2^1 + C_2^1)}{C_4^2 C_4^2} = \frac{2}{3}$; 3 分

$P(X=2) = \frac{C_4^2 \cdot 1}{C_4^2 \cdot C_4^2} = \frac{1}{6}$, 4 分

故 X 的数学分布列为:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

(2) $P(X=2) = \frac{C_n^3 C_3^2 C_{n-3}^1}{C_n^3 C_n^3} = \frac{C_3^2 C_{n-3}^1}{C_n^3} = \frac{9}{20}$, 5 分

∴ $n(n-1)(n-2) = 40(n-3)$, 6 分

∴ $n^2(n-6) + (n-6)(3n-20) = 0$, 7 分

∴ $(n-6)(n^2 + 3n - 20) = 0$, 8 分

又 $n \geq 3$, $n \in \mathbf{N}^*$, 且方程 $n^2 + 3n - 20 = 0$ 无正整数根,

∴ $n=6$; 9 分

$$(3) I_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 个球同时在集合 } M, N \text{ 中} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 个球不同时在集合 } M, N \text{ 中} \end{cases}, \text{ 则 } X = \sum_{i=1}^n I_i,$$

由于两次抽取相互独立，且每个球被抽到的概率均为 $\frac{k}{n}$ ，

$$\therefore P(I_i=1) = \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{k^2}{n^2}, \quad E(I_i) = 1 \times \frac{k^2}{n^2} + 0 = \frac{k^2}{n^2},$$

$$\text{因此 } E(X) = E\left(\sum_{i=1}^n I_i\right) = \sum_{i=1}^n E(I_i) = n \cdot \frac{k^2}{n^2} = \frac{k^2}{n}, \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$X^2 = \left(\sum_{i=1}^n I_i\right)^2 = (I_1 + I_2 + \dots + I_n)^2 = \sum_{i=1}^n I_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} I_i I_j = \sum_{i=1}^n I_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} I_i I_j,$$

$$\text{可得: } E(X^2) = \sum_{i=1}^n E(I_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} E(I_i I_j), \text{ 其中 } E(I_i) = 1 \cdot \frac{k^2}{n^2} = \frac{k^2}{n^2}, \quad \sum_{i=1}^n E(I_i) = \frac{k^2}{n},$$

$$\text{又 } E(I_i I_j) = P(i, j \in M) \cdot P(i, j \in N) = [P(i, j \in M)]^2,$$

$$\therefore P(i, j \in M) = \frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1}, \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{因此 } E(I_i I_j) = \left[\frac{k(k-1)}{n(n-1)}\right]^2, \quad \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

$$\therefore I_i I_j \text{ 共有 } C_n^2 \text{ 项, } 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} E(I_i I_j) = 2C_n^2 \frac{k^2(k-1)^2}{n^2(n-1)^2},$$

$$\text{代入得: } E(X^2) = \frac{k^2}{n} + 2C_n^2 \frac{k^2(k-1)^2}{n^2(n-1)^2} = \frac{k^2}{n} + \frac{k^2(k-1)^2}{n(n-1)}, \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

$$\therefore D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{k^2(n-k^2)}{n^2} + \frac{k^2(k-1)^2}{n(n-1)} = \frac{(kn-k^2)^2}{n^2(n-1)}, \quad \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

$$\textcircled{1} \text{ 当 } n \text{ 为偶数时, } k = \frac{n}{2}, D(X) \text{ 最大, } D(X) = \frac{n^2}{16(n-1)}; \quad \dots\dots\dots 16 \text{ 分}$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } n \text{ 为奇数时, } k = \frac{n+1}{2} \text{ 或 } k = \frac{n-1}{2}, D(X) \text{ 最大, } D(X) = \frac{(n+1)^2(n-1)}{16n^2}. \quad \dots\dots\dots 17 \text{ 分}$$

19. 解: (1) $\because f(x) - f(1) = (2x^2 + x - 1)\ln(x+1) - \frac{1}{2}x^3 + a(x^2 - 1) + x - 2\ln 2 - \frac{1}{2},$

由于 $a \geq -\frac{3}{2}, x? (1, 0),$ 则 $a(x^2 - 1) \leq -\frac{3}{2}(x^2 - 1), \quad \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

令 $g(x) = (2x^2 + x - 1)\ln(x+1) - \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + 1 - 2\ln 2,$

要证 $x? (1, 0), f(x) < f(1),$ 只需证: $g(x) < 0, \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$g'(x) = (4x+1)\ln(x+1) - \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1,$ 易知 $g'(0) = 0,$

$g''(x) = 4\ln(x+1) - \frac{3x^2}{x+1}, \quad g''(0) = 0,$ (其中 $g''(x)$ 为函数 $g'(x)$ 的导函数)

$$g''(x) = \frac{-3x^2 - 2x + 4}{(x+1)^2} \quad (-1 < x < 0), \text{ 可得 } g''(x) > 0, \text{ (其中 } g''(x) \text{ 为函数 } g(x) \text{ 的导函数)}$$

函数)

- ∴ $g'(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递增, $g'(x) < g'(0) = 0$,
- ∴ $g(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递减, $g'(x) > g'(0) = 0$,
- ∴ $g(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递增, $g(x) < g(0) = 1 - 2\ln 2 < 0$, 3 分

∴ 当 $a \geq -\frac{3}{2}$ 时, $x \in (-1, 0)$, $f(x) < f(1)$; 4 分

(2) ∴ $f'(x) = (4x+1)\ln(x+1) + 2x - \frac{3}{2}x^2 + 2ax$, 且 $f'(0) = 0$,

∴ $f''(x) = 4\ln(x+1) + \frac{4x+1}{x+1} - 3x + 2a + 2$, $f''(0) = 3 + 2a$, 5 分

(i) ∴ 0 为 $f(x)$ 的极小值点, 由于 $f'(0) = f(0) = 0$,

∴ 必有 $f''(0) = 2a + 3 > 0$, 即 $a > -\frac{3}{2}$, 6 分

由于 $f''(x) = \frac{4}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} - 3 = \frac{-3x^2 - 2x + 4}{(x+1)^2} \quad (x > -1)$,

令 $f''(x_0) = 0$, 则 $x_0 = \frac{\sqrt{13} - 1}{3}$, 7 分

∴ 存在 $-1 < m < 0 < x_0 < n$, 使得在 $(-1, m)$ 与 $(n, +\infty)$ 上满足 $f''(x) < 0$, $f'(x)$ 单调递减; 在 (m, n) 上 $f''(x) > 0$, $f'(x)$ 单调递增. 8 分

∴ 存在 $-1 < s < 0 < t$, 使得在 $(-1, s)$ 与 $(0, t)$ 上有 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 在 $(s, 0)$ 与 $(t, +\infty)$ 上有 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减. 9 分

∴ $f(x)$ 的极大值点为: $x_1 = s, x_2 = t$,

由于 $f'(1) = 5\ln 2 + 0.5 + 2a > 5\ln 2 + 0.5 - 3 > 0$, 则 $x_2 > 1$,

$f(x)$ 在 $(1, x_2)$ 单调递增, 则 $f(x_2) > f(1)$ 10 分

由于 $-1 < x_1 < 0, a > -\frac{3}{2}$,

由 (1) 得: $f(x_1) < f(1)$,

∴ $f(x_1) < f(1) < f(x_2)$, 则 $f(x_1) < f(x_2)$; 11 分

(ii) ∴ $x_1 = 0$ 为 $f(x)$ 的一个极大值点,

$f'(0) = 0$, 且 $f(0) = 0$, 由于 $f(x_1) = f(x_2)$, 所以 $f(x_2) = f'(x_2) = 0$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(4x_2 + 1)\ln(x_2 + 1) + 2x_2 - \frac{3}{2}x_2^2 + 2ax_2 = 0 \\ \text{即 } & \frac{1}{2}(2x_2^2 + x_2 - 1)\ln(1 + x_2) - \frac{1}{2}x_2^3 + ax_2^2 + x_2 = 0 \end{aligned} \quad (*) \text{ 12 分}$$

消去 a 可得, $(x_2 - 2)\ln(1 + x_2) + \frac{1}{2}x_2(x_2^2 - 4x_2 + 4) = 0$,

∴ $(x_2 - 2)[\ln(1 + x_2) + \frac{1}{2}x_2^2 - x_2] = 0$, 13 分

令 $T(x) = \ln(1+x) + \frac{1}{2}x^2 - x$ ，由于 $T'(x) = \frac{x^2}{1+x} > 0 (x > -1)$ ，

则 $T(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 单调递增，又 $T(0)=0$ ，但 $x_2 \neq x_1=0$ ，所以 $T(x) \neq 0$ ，则 $x_2=2$ ，

将 $x_2=2$ 带入(*)得到 $a = \frac{2-9\ln 3}{4}$ ，..... 15 分

下面检验当 $a = \frac{2-9\ln 3}{4}$ 时，代入 $f(x)$ 得到，

$$\text{此时 } f'(x) = (4x+1)\ln(x+1) + 2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{2-9\ln 3}{2}x,$$

易知 $f'(0) = f'(2) = 0$ ，

又 $f''(0) = 3+2a = \frac{8-9\ln 3}{2} < 0$ ，则 $x=0$ 为 $f(x)$ 的极大值点，..... 16 分

$f''(2) = -\frac{\ln 3}{2} < 0$ ，则 $x_2=2$ 为 $f(x)$ 的极大值点，且 $f(0) = f(2) = 0$ ，则符合题意；

\therefore 存在 $a = \frac{2-9\ln 3}{4}$ ，使得 $f(x_1) = f(x_2)$ 。..... 17 分

