高三年级
数学参考答案及评分意见

评分说明：

1. 本解答给出了一种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制定相应的评分细则。

2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4. 只给整数分。

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求。

1	2	3	4	5	6	7	8
C	A	B	C	D	A	D	B

二、选择题：本大题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，选对但不全的得部分分，有选错的得 0 分。

9	10	11
BD	BCD	ACD

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. -2　　13. 12　　14. $(\frac{2}{e},+\infty)$

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. 【命题意图】通过课程学习中的解三角形为素材，主要考查两角和的正弦公式，特殊角的三角函数，余弦定理，三角形面积，三角形周长等基础知识，考查运算求解能力，逻辑推理能力，应用意识。

【解析】

（1）由 $\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$，

有 $2\sin(A-\frac{\pi}{6})=1$，

即 $\sin(A-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$，　　…………………………3 分

$\because 0<A<\pi$，

$\therefore -\frac{\pi}{6}<A-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，

$\therefore A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，

$\therefore A=\frac{\pi}{3}$；　　…………………………6 分

（2）由（1）的结论有 $A=\frac{\pi}{3}$，

又 $\because b=3$，$S_{\triangle ABC}=3\sqrt{3}$，

由三角形面积公式有 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A$

$=\frac{1}{2}\times 3c\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{3\sqrt{3}}{4}c=3\sqrt{3}$，

$\therefore c=4$，　　…………………………9 分

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理有 $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$

$=3^2+4^2-2\times3\times4\cos\frac{\pi}{3}$

$=13$，

$\therefore a=\sqrt{13}$，　　…………………………12 分

$\therefore \triangle ABC$ 的周长 $=a+b+c=7+\sqrt{13}$.　　…………………………13 分

16.【命题意图】通过直三棱柱创设情境，设计基础性与综合性问题，考查直线与平面、平面与平面的位置关系、二面角、空间向量等基础知识，考查线面平行的性质定理的运用方法以及二面角的余弦值计算方法，考查数学抽象、直观想象、数学运算等核心素养。

【解析】

方法1：

(1)若 A_1C_1 // 平面 B_1EF，则 E 为 AB 中点，　　……2分

理由如下：

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，A_1C_1 // AC，

$\because A_1C_1$ // 平面 B_1EF，$AC\not\subset$ 平面 B_1EF，

$\therefore AC$ // 平面 B_1EF，

又 $\because$ 平面 $ABC\cap$ 平面 $B_1EF=EF$，

故 AC // EF，　　……4分

$\therefore \dfrac{AE}{AB}=\dfrac{CF}{BC}$，

又 $\because AB=BC$，

$\therefore AE=CF$，

又 $\because AE=BF$，

$\therefore CF=BF$，

即 F 为 BC 的中点，

从而 E 为 AB 的中点，

故当 A_1C_1 // 平面 B_1EF 时，E 为 AB 中点；　　……6分

(2)不妨设 $AB=1$，$BF=t(0<t<1)$，

则三棱锥 $B-B_1EF$ 的体积 $V=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\triangle BEF}\cdot BB_1$

$=\dfrac{1}{6}\cdot BE\cdot BF$

$=\dfrac{t(1-t)}{6}$　　……8分

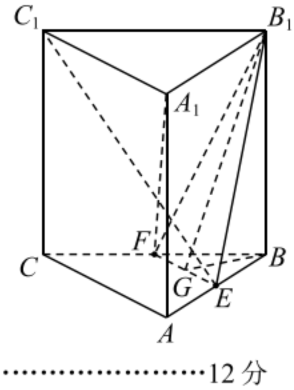
$\leqslant\dfrac{1}{6}[\dfrac{t+(1-t)}{2}]^2$

$=\dfrac{1}{24}$，

当且仅当 $t=1-t$，即 $t=\dfrac{1}{2}$ 时取“=”，

此时，E，F 分别为 AB，CB 的中点，　　…… 10分

过点 B 作 $BG\perp EF$ 于点 G，



可知 G 为 EF 的中点，连接 B_1G，

则 $EF\perp BG$，

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，

$BB_1\perp$ 平面 ABC，

$\therefore EF\perp BB_1$，

$\because BB_1\cap BG=B$，

$\therefore EF\perp$ 平面 B_1BG，

$\therefore EF\perp B_1G$，

$\therefore \angle B_1GB$ 是二面角 B_1-EF-B 的平面角，　　……12分

$\because BB_1=1$，$BE=\dfrac{1}{2}$，$BF=\dfrac{1}{2}$，$BG=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，

$\therefore B_1G=\sqrt{BG^2+BB_1^2}=\sqrt{(\dfrac{\sqrt{2}}{4})^2+1^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$，

则 $\cos\angle B_1GB=\dfrac{BG}{B_1G}=\dfrac{1}{3}$，

故当三棱锥 $B-B_1EF$ 的体积取得最大值时，平面 B_1EF 与平面 BEF 的夹角的余弦值为 $\dfrac{1}{3}$.

……15分

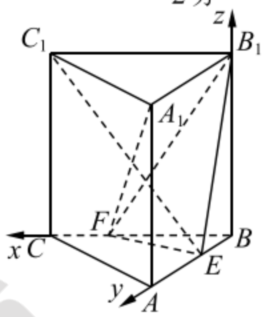
方法 2：

(1)以 B 为原点，以 $\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BB_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $B-xyz$，

设 $AB=1$，$AE=BF=t(0<t<1)$，

则 $A(0,1,0)$，$C(1,0,0)$，$E(0,1-t,0)$，$F(t,0,0)$，$B_1(0,0,1)$，

$\overrightarrow{AC}=(1,-1,0)$，$\overrightarrow{EF}=(t,t-1,0)$，$\overrightarrow{B_1E}=(0,1-t,-1)$，　　……………………………2 分



设平面 B_1EF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{B_1E}=0,\end{cases}$

得 $\begin{cases}tx+(t-1)y=0,\\ (1-t)y-z=0,\end{cases}$

取 $y=1$，

得 $x=\dfrac{1}{t}-1$，$z=1-t$，

则平面 B_1EF 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(\dfrac{1}{t}-1,1,1-t)$，　　……………………………4 分

欲使 A_1C_1 // 平面 B_1EF，

即使 AC // 平面 B_1EF，

则 $\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=0$，

$\therefore \dfrac{1}{t}-1-1=0$，

得 $t=\dfrac{1}{2}$，

可知 E 为 AB 的中点，

故当 A_1C_1 // 平面 B_1EF 时，E 为 AB 中点；　　……………………………6 分

(2)三棱锥 $B-B_1EF$ 的体积为 $V=\dfrac{1}{3}\cdot S_{\triangle BEF}\cdot BB_1$

$$=\frac{1}{6}\cdot BE\cdot BF$$

$$=\frac{t(1-t)}{6}$$　　……………………………8 分

$$\leqslant\frac{1}{6}[\frac{t+(1-t)}{2}]^2$$

$$=\frac{1}{24},$$

当且仅当 $t=1-t$，即 $t=\dfrac{1}{2}$ 时取“=”，　　……………………………10 分

此时，平面 B_1EF 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(1,1,\dfrac{1}{2})$，

平面 BEF 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$，　　……………………………12 分

设平面 B_1EF 与平面 BEF 的夹角为 θ，

可知 $0<\theta<90°$，

则 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+1+\frac{1}{4}}}=\dfrac{1}{3}$，

故当三棱锥 $B-B_1EF$ 的体积取得最大值时，平面 B_1EF 与平面 BEF 的夹角的余弦值为 $\dfrac{1}{3}$.

……………………………15 分

17.【命题意图】通过含参函数创设情境，设计基础性、综合性、创新性问题，主要考查函数、导数等基础知识，考查导数的几何意义、利用导数研究函数图象和性质的方法，考查数学抽象、逻辑推理、数学运算等核心素养。

【解析】

(1)由 $f(x)=2\ln x+ax^2-2(a+1)x+3$，可知 $x>0$，

$f'(x)=\dfrac{2}{x}+2ax-2(a+1)=\dfrac{2(ax-1)(x-1)}{x}$，　…………………………1分

①当 $a\leqslant 0$ 时，

$ax-1<0$，

可知当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，

当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，

此时，$f(x)$在区间$(0,1)$上单调递增，在区间$(1,+\infty)$上单调递减；…………………………2分

②当 $0<a<1$ 时，

可知当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，

当 $1<x<\dfrac{1}{a}$ 时，$f'(x)<0$，

当 $x>\dfrac{1}{a}$ 时，$f'(x)>0$，

此时，$f(x)$在区间$(0,1)$上单调递增，在区间$(1,\dfrac{1}{a})$上单调递减，在区间$(\dfrac{1}{a},+\infty)$上单调递增；

…………………………3分

③当 $a=1$ 时，

$f'(x)=\dfrac{2(x-1)^2}{x}\geqslant 0$，$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增；　…………………………4分

④当 $a>1$ 时，

可知当 $0<x<\dfrac{1}{a}$ 时，$f'(x)>0$，

当 $\dfrac{1}{a}<x<1$ 时，$f'(x)<0$，

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，

此时，$f(x)$在区间$(0,\dfrac{1}{a})$上单调递增，在区间$(\dfrac{1}{a},1)$上单调递减，在区间$(1,+\infty)$上单调递增；

…………………………5分

综上所述：①当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$在区间$(0,1)$上单调递增，在区间$(1,+\infty)$上单调递减；

②当 $0<a<1$ 时，$f(x)$在区间$(0,1)$上单调递增，在区间$(1,\dfrac{1}{a})$上单调递减，在区间$(\dfrac{1}{a},+\infty)$上单调递增；

③当 $a=1$ 时，$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上单调递增；

④当 $a>1$ 时，$f(x)$在区间$(0,\dfrac{1}{a})$上单调递增，在区间$(\dfrac{1}{a},1)$上单调递减，在区间$(1,+\infty)$上单调递增；　…………………………6分

(2)**方法1**：

由(1)可知，当$0<a<1$时，

$x=1$是函数$f(x)$的极大值点，极大值$f(1)=1-a>0$，

函数$f(x)$的极小值$f(\frac{1}{a})=2\ln\frac{1}{a}+a\cdot(\frac{1}{a})^2-2(a+1)\cdot\frac{1}{a}+3$

$=1-\frac{1}{a}+2\ln\frac{1}{a}$， ……………………………8分

令$g(x)=1-\frac{1}{x}+2\ln\frac{1}{x}\ (0<x<1)$，

即$g(x)=1-\frac{1}{x}-2\ln x$，

则$g'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{1-2x}{x^2}$，

当$0<x<\frac{1}{2}$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，

当$1>x>\frac{1}{2}$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，

则$x=\frac{1}{2}$是$g(x)$的极大值点，

则$g(x)$的极大值为$g(\frac{1}{2})=2\ln2-1$，

又$\because$当$x\to0$时，$g(x)\to-\infty$，

则$g(x)$的值域为$(-\infty,2\ln2-1)$，

即$f(x)$的极小值$f(\frac{1}{a})$取值范围是$(-\infty,2\ln2-1)$， ……………………………12分

又$\because 2\ln2-1>0$，

则存在$a_0\in(0,\frac{1}{2})$，$g(a_0)=0$，

即a_0为方程$1-\frac{1}{a}+2\ln\frac{1}{a}=0$的根，

当$a\in(0,a_0)$时，$g(x)$单调递增，

则$g(a)<0$，即$f(\frac{1}{a})<0$，

又$\because$当$x\to0$时，$f(x)\to-\infty$，

当$x\to+\infty$时，$f(x)\to+\infty$，

$\therefore$存在正实数a_0，使得$a\in(0,a_0)$时，函数$f(x)$有且只有3个零点． ……………………………15分

方法2：

由(1)可知，当$0<a<1$时，

$x=1$是函数$f(x)$的极大值点，极大值$f(1)=1-a>0$，

函数$f(x)$的极小值$f(\frac{1}{a})=2\ln\frac{1}{a}+a\cdot(\frac{1}{a})^2-2(a+1)\cdot\frac{1}{a}+3$

$=1-\frac{1}{a}+2\ln\frac{1}{a}$， ……………………………8分

令$g(x)=1-\frac{1}{x}+2\ln\frac{1}{x}\ (0<x<1)$，

即$g(x)=1-\frac{1}{x}-2\ln x$，

则$g'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{1-2x}{x^2}$，

当$0<x<\frac{1}{2}$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，

当$1>x>\frac{1}{2}$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，

取$a_0=\frac{1}{e^2}$（或$\frac{1}{e^3}$，$\frac{1}{e^4}$等），则$g(\frac{1}{e^2})=1-e^2-2\ln\frac{1}{e^2}=5-e^2<0$， ……………………………12分

当$a\in(0,a_0)$时，$g(x)$单调递增，

则$g(a)<0$，即$f(\frac{1}{a})<0$，

又$\because$当$x\to0$时，$f(x)\to-\infty$，

当$x\to+\infty$时，$f(x)\to+\infty$，

$\therefore$存在正实数a_0，使得$a\in(0,a_0)$时，函数$f(x)$有且只有3个零点． ……………………………15分

18. 【命题意图】通过直线与椭圆创设情境，设计基础性、综合性问题，考查椭圆定义、标准方程和几何性质等基础知识，考查直线与椭圆的综合运用、圆锥曲线问题的解决方法，考查数学抽象、直观想象、数学运算等核心素养。

【解析】

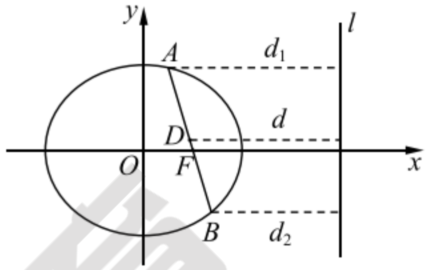
(1)直线 l 与以线段 AB 为直径的圆相离，　…………………………2 分

理由如下：

由已知，右焦点 F 的坐标为 $(1,0)$，

设点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

其中 $-2\leqslant x_1\leqslant 2$，$-2\leqslant x_2\leqslant 2$，



令点 A，B 到直线 l 的距离分别为 d_1，d_2，

则 $|AF|=\sqrt{(x_1-1)^2+y_1^2}$

$=\sqrt{(x_1-1)^2+3-\frac{3x_1^2}{4}}$

$=\sqrt{\frac{1}{4}(x_1-4)^2}$

$=2-\frac{1}{2}x_1$

$=\frac{1}{2}d_1$，

同理，$|BF|=\frac{1}{2}d_2$，

设 D 为 AB 的中点，点 D 到直线 l 的距离为 d，

则 $d=\frac{d_1+d_2}{2}=|AF|+|BF|=|AB|>\frac{|AB|}{2}$，

显然，以线段 AB 为直径的圆的圆心为 D，半径为 $\frac{|AB|}{2}$，

∴直线 l 与以线段 AB 为直径的圆相离；　…………………………5 分

(2)(ⅰ)**方法 1**：

由题意知直线 AB 不与 x 轴重合，

由已知，直线 AB 的方程可设为 $x=my+1$，

联立 $\begin{cases}x=my+1,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，　(*)

$\therefore y_1+y_2=-\frac{6m}{3m^2+4}$，

则 $x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2=\frac{8}{3m^2+4}$，　…………………………7 分

由(1)得，$|AB|=|AF|+|BF|$

$=2-\frac{1}{2}x_1+2-\frac{1}{2}x_2$

$=4-\frac{1}{2}(x_1+x_2)$

$=4-\frac{4}{3m^2+4}$

$\geqslant 3$，

当且仅当 $m=0$，即 AB 垂直于 x 轴时取“=”，

根据平面几何知识，此时 $|PF|$ 同时取得最小值 3，

$\therefore\triangle PAB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|AB|\cdot|PF|\geqslant\frac{1}{2}\times 3\times 3=\frac{9}{2}$，

故 $\triangle PAB$ 面积的最小值为 $\frac{9}{2}$.　…………………………11 分

方法 2：

由题意知直线 AB 不与 x 轴重合，

由已知，直线 AB 的方程可设为 $x=my+1$，

联立 $\begin{cases} x=my+1, \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$，　（*）

$\therefore y_1+y_2=-\dfrac{6m}{3m^2+4}$，

则 $x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2=\dfrac{8}{3m^2+4}$，　……………………………… 7 分

由(1)得，$|AB|=|AF|+|BF|$

$=2-\dfrac{1}{2}x_1+2-\dfrac{1}{2}x_2$

$=4-\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)$

$=\dfrac{12m^2+12}{3m^2+4}$，　……………………………… 8 分

$\because$ 过焦点 F 且与直线 AB 垂直的直线方程为 $y=-m(x-1)$，

则 $P(4,-3m)$，

$|PF|=\sqrt{(4-1)^2+(-3m)^2}=3\sqrt{m^2+1}$，　……………………………… 9 分

$\triangle PAB$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot|PF|$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{12m^2+12}{3m^2+4}\times3\sqrt{m^2+1}$

$=\dfrac{18(m^2+1)\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}$，

令 $t=\sqrt{m^2+1}$，$t\geqslant1$，

则 $S(t)=\dfrac{18t^3}{3t^2+1}$，$t\geqslant1$，

于是 $S'(t)=18\times\dfrac{3t^2(3t^2+1)-t^3\cdot6t}{(3t^2+1)^2}=54\times\dfrac{t^2(t^2+1)}{(3t^2+1)^2}\geqslant0$，

$\therefore$ 当 $t\geqslant1$ 时，$S(t)$ 单调递增，

【或 $S(t)=\dfrac{18t^3}{3t^2+1}=\dfrac{18}{\dfrac{3}{t}+\dfrac{1}{t^3}}$，可知，当 $t\geqslant1$ 时，$S(t)$ 单调递增】

$\therefore$ 当 $t=1$，即 $m=0$ 时，

$S(t)$ 取得最小值，最小值为 $S(1)=\dfrac{9}{2}$，

故 $\triangle PAB$ 面积的最小值为 $\dfrac{9}{2}$；　……………………………… 11 分

(ii) 欲证直线 PA 与椭圆 C 有且只有一个公共点，

只需证明在点 A 处切线 l' 的斜率等于直线 PA 的斜率 k_{PA}，

由(i)得，$A(x_1,y_1)$，其中 $x_1=my_1+1$，

依题意，直线 l' 的斜率存在，设为 k，

则 l' 的方程为 $y-y_1=k(x-x_1)$，

联立 $\begin{cases} y-y_1=k(x-x_1), \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1, \end{cases}$

得 $(3+4k^2)x^2+8k(y_1-kx_1)x+4(y_1-kx_1)^2-12=0$，

由于直线 l' 与椭圆 C 仅有一个公共点，

则由 $\Delta=0$，

得 $64k^2(y_1-kx_1)^2-4(3+4k^2)[4(y_1-kx_1)^2-12]=0$，　……………………………… 12 分

$\therefore -3(y_1-kx_1)^2+3(3+4k^2)=0$,

即$(4-x_1^2)k^2+2x_1y_1k+3-y_1^2=0$,

解得 $k=\dfrac{x_1y_1}{x_1^2-4}=\dfrac{x_1y_1}{-\frac{4}{3}y_1^2}=-\dfrac{3x_1}{4y_1}=-\dfrac{3my_1+3}{4y_1}$, ………………………… 13 分

过焦点 F 且与直线 AB 垂直的直线方程为 $y=-m(x-1)$,

则 $P(4,-3m)$,

$k_{PA}=\dfrac{y_1+3m}{x_1-4}=\dfrac{y_1+3m}{my_1-3}$, ………………………… 14 分

只需证明 $k_{PA}=-\dfrac{3x_1}{4y_1}$,

即证明 $\dfrac{y_1+3m}{my_1-3}=-\dfrac{3my_1+3}{4y_1}$ 恒成立即可,

即只需证明$(y_1+3m)4y_1=(3my_1+3)(3-my_1)$,

即证明 $4y_1^2+12my_1=9+6my_1-3m^2y_1^2$,

即证明$(3m^2+4)y_1^2+6my_1-9=0$,

只需证明 y_1 满足方程$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$ 即可,

根据(ⅰ)中的方程(*),

显然 y_1 是方程$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$ 的一个根,

$\therefore k_{PA}=-\dfrac{3x_1}{4y_1}$,

由此可知,直线 PA 与椭圆 C 有且只有一个公共点. ………………………… 17 分

19.【命题意图】通过提示灯创设生活情境,设计应用性与综合性问题,考查概率、全概率公式、数列等基础知识,考查概率的计算与应用、数列通项公式的求法,考查逻辑推理、数学运算等核心素养和创新能力。

【解析】

(1)设事件 A_n=“第 n 次亮灯为红灯”,事件 B_n=“第 n 次亮灯为黄灯”,

则第三次亮灯为红灯的概率:

$$
\begin{aligned}
P(A_3)&=P(A_2A_3+B_2A_3) \quad \text{………………………… 2 分}\\
&=P(A_2A_3)+P(B_2A_3)\\
&=P(A_2)P(A_3|A_2)+P(B_2)P(A_3|B_2)\\
&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\\
&=\frac{5}{12};
\end{aligned}
$$
………………………… 4 分

(2)**方法 1**:

(ⅰ)设事件 C_n=“第 n 次亮灯为绿灯”,$P(A_n)=a_n$, $P(B_n)=b_n$, $P(C_n)=c_n$,

$$
\begin{aligned}
\therefore P(B_{n+1})&=P(A_nB_{n+1}+B_nB_{n+1}+C_nB_{n+1})\\
&=P(A_nB_{n+1})+P(B_nB_{n+1})+P(C_nB_{n+1})\\
&=P(A_n)P(B_{n+1}|A_n)+P(B_n)P(B_{n+1}|B_n)+P(C_n)P(B_{n+1}|C_n)\\
&=\frac{1}{2}a_n+0\times b_n+\frac{1}{2}c_n\\
&=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}c_n,
\end{aligned}
$$

则 $b_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}c_n$, ① ………………………… 6 分

$\because a_n+b_n+c_n=1$,

$\therefore b_{n+1}=\dfrac{1}{2}(1-b_n)$,

即 $b_{n+1}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{2}(b_n-\dfrac{1}{3})$,

由于 $b_1-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{3}\neq 0$,

则$\{b_n-\dfrac{1}{3}\}$是以 $-\dfrac{1}{3}$ 为首项,$-\dfrac{1}{2}$ 为公比的等比数列,

$\therefore b_n-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{3}(-\dfrac{1}{2})^{n-1}$, ………………………… 8 分

$\because P(A_{n+1})=P(A_nA_{n+1}+B_nA_{n+1}+C_nA_{n+1})$
$=P(A_nA_{n+1})+P(B_nA_{n+1})+P(C_nA_{n+1})$
$=P(A_n)P(A_{n+1}|A_n)+P(B_n)P(A_{n+1}|B_n)+P(C_n)P(A_{n+1}|C_n)$
$=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{2}c_n$,

即 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{2}c_n$
$=(\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}c_n)+\frac{1}{3}b_n$, ② ……………………………… 10分

由①②得 $a_{n+1}=b_{n+1}+\frac{1}{3}b_n=-\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^n+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}[-\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1}+\frac{1}{3}]$
$=\frac{1}{18}(-\frac{1}{2})^{n-1}+\frac{4}{9}\ (n\geqslant 1)$,

$\therefore a_n=\frac{1}{18}(-\frac{1}{2})^{n-2}+\frac{4}{9}\ (n\geqslant 2)$,

即 $P_n=\frac{1}{18}(-\frac{1}{2})^{n-2}+\frac{4}{9}\ (n\geqslant 2)$; ……………………………… 12分

(ii)由(i)可知，$a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n$
$=\frac{1}{3}[-\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1}+\frac{1}{3}]$
$=\frac{1}{9}[1-(-\frac{1}{2})^{n-1}]$,

当 $n=2k-1\ (k\in\mathbf{N}^*)$时，

$1-(-\frac{1}{2})^{n-1}\geqslant 0$，$a_{n+1}\geqslant b_{n+1}$，当且仅当 $n=1$ 时取等号，

当 $n=2k\ (k\in\mathbf{N}^*)$时，

$1-(-\frac{1}{2})^{n-1}>0$，$a_{n+1}>b_{n+1}$，

综上，$a_{n+1}\geqslant b_{n+1}$，当且仅当 $n=1$ 时取等号，

$\therefore$亮红灯的概率不小于亮黄灯的概率， ……………………………… 13分

又 $\because P(C_{n+1})=P(A_nC_{n+1}+B_nC_{n+1}+C_nC_{n+1})$
$=P(A_nC_{n+1})+P(B_nC_{n+1})+P(C_nC_{n+1})$
$=P(A_n)P(C_{n+1}|A_n)+P(B_n)P(C_{n+1}|B_n)+P(C_n)P(C_{n+1}|C_n)$
$=0\times a_n+\frac{2}{3}b_n+0\times c_n$
$=\frac{2}{3}b_n$,

即 $c_{n+1}=\frac{2}{3}b_n$,

故 $c_{n+1}=\frac{2}{3}b_n=\frac{2}{3}[-\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1}+\frac{1}{3}]$, ……………………………… 15分

$a_{n+1}-c_{n+1}=\frac{1}{18}(-\frac{1}{2})^{n-1}+\frac{4}{9}+\frac{2}{9}(-\frac{1}{2})^{n-1}-\frac{2}{9}$
$=\frac{5}{18}(-\frac{1}{2})^{n-1}+\frac{2}{9}$
$=\frac{1}{18}[5(-\frac{1}{2})^{n-1}+4]$,

当 $n=2k-1\ (k\in\mathbf{N}^*)$时，$5(-\frac{1}{2})^{2k-2}+4>0$，$a_{n+1}>c_{n+1}$，

当 $n=2k\ (k\in\mathbf{N}^*)$时，$5(-\frac{1}{2})^{2k-1}+4>0$，$a_{n+1}>c_{n+1}$，

$\therefore a_{n+1}>c_{n+1}$，

即亮红灯的概率大于亮绿灯的概率，

综上所述，当 $n\geqslant 2$ 时，该提示灯亮红色灯的概率最大． ……………………………… 17分

方法2：

（ⅰ）设事件 C_n＝“第 n 次亮灯为绿灯”，$P(A_n)=a_n$，$P(B_n)=b_n$，$P(C_n)=c_n$，

$$P(A_{n+1})=P(A_nA_{n+1}+B_nA_{n+1}+C_nA_{n+1})$$
$$=P(A_nA_{n+1})+P(B_nA_{n+1})+P(C_nA_{n+1})$$
$$=P(A_n)P(A_{n+1}|A_n)+P(B_n)P(A_{n+1}|B_n)+P(C_n)P(A_{n+1}|C_n)$$
$$=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{2}c_n,$$

即 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{2}c_n$，　① ………………………………6分

$$P(B_{n+1})=P(A_nB_{n+1}+B_nB_{n+1}+C_nB_{n+1})$$
$$=P(A_nB_{n+1})+P(B_nB_{n+1})+P(C_nB_{n+1})$$
$$=P(A_n)P(B_{n+1}|A_n)+P(B_n)P(B_{n+1}|B_n)+P(C_n)P(B_{n+1}|C_n)$$
$$=\frac{1}{2}a_n+0\times b_n+\frac{1}{2}c_n$$
$$=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}c_n,$$

即 $b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}c_n$，　② ………………………………8分

$$P(C_{n+1})=P(A_nC_{n+1}+B_nC_{n+1}+C_nC_{n+1})$$
$$=P(A_nC_{n+1})+P(B_nC_{n+1})+P(C_nC_{n+1})$$
$$=P(A_n)P(C_{n+1}|A_n)+P(B_n)P(C_{n+1}|B_n)+P(C_n)P(C_{n+1}|C_n)$$
$$=0\times a_n+\frac{2}{3}b_n+0\times c_n$$
$$=\frac{2}{3}b_n,$$

即 $c_{n+1}=\frac{2}{3}b_n$，

$\therefore c_n=\frac{2}{3}b_{n-1}$，③ ………………………………10分

由①②得 $a_{n+1}=b_{n+1}+\frac{1}{3}b_n$，

$\therefore a_n=b_n+\frac{1}{3}b_{n-1}$，　④

将③④代入②得 $b_{n+1}=\frac{1}{2}(b_n+\frac{1}{3}b_{n-1})+\frac{1}{3}b_{n-1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}b_{n-1}$，

$\therefore b_{n+1}+\frac{1}{2}b_n=b_n+\frac{1}{2}b_{n-1}$，

$\because b_1=0$，$b_2=\frac{1}{2}$，

$\therefore b_{n+1}+\frac{1}{2}b_n=\frac{1}{2}$，

$\therefore b_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}(b_n-\frac{1}{3})$，且 $b_1-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\neq 0$，

$\therefore \{b_n-\frac{1}{3}\}$ 是以 $-\frac{1}{3}$ 为首项，$-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列，

$\therefore b_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1}$，

即 $b_n=-\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1}+\frac{1}{3}$，

故 $a_{n+1}=b_{n+1}+\frac{1}{3}b_n$

$$=-\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}[-\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1}+\frac{1}{3}]$$
$$=\frac{1}{18}(-\frac{1}{2})^{n-1}+\frac{4}{9},$$

$\therefore a_n=\frac{1}{18}(-\frac{1}{2})^{n-2}+\frac{4}{9}\ (n\geqslant 2)$，

即 $P_n=\frac{1}{18}(-\frac{1}{2})^{n-2}+\frac{4}{9}\ (n\geqslant 2)$； ………………………………12分

（ii）$\because a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n=\frac{1}{3}[-\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1}+\frac{1}{3}]=\frac{1}{9}[1-(-\frac{1}{2})^{n-1}]$，

当 $n=2k-1\ (k\in\mathbf{N}^*)$时，

$1-(-\frac{1}{2})^{n-1}\geqslant 0$，$a_{n+1}\geqslant b_{n+1}$，当且仅当 $n=1$ 时，取等，

当 $n=2k\ (k\in\mathbf{N}^*)$时，

$1-(-\frac{1}{2})^{n-1}>0$，$a_{n+1}>b_{n+1}$，

$\therefore a_{n+1}\geqslant b_{n+1}$，当且仅当 $n=1$ 时，取等，

即亮红灯的概率不小于亮黄灯的概率，　　　　………………………… 13 分

又$\because c_{n+1}=\frac{2}{3}b_n=\frac{2}{3}[-\frac{1}{3}(-\frac{1}{2})^{n-1}+\frac{1}{3}]$，

$$a_{n+1}-c_{n+1}=\frac{1}{18}(-\frac{1}{2})^{n-1}+\frac{4}{9}+\frac{2}{9}(-\frac{1}{2})^{n-1}-\frac{2}{9}$$

$$=\frac{5}{18}(-\frac{1}{2})^{n-1}+\frac{2}{9}$$

$$=\frac{1}{18}[5(-\frac{1}{2})^{n-1}+4]$$，　　　　………………………… 15 分

当 $n=2k-1\ (k\in\mathbf{N}^*)$时，

$5(-\frac{1}{2})^{2k-2}+4>0$，$a_{n+1}>c_{n+1}$，

当 $n=2k\ (k\in\mathbf{N}^*)$时，

$5(-\frac{1}{2})^{2k-1}+4>0$，$a_{n+1}>c_{n+1}$，

$\therefore a_{n+1}>c_{n+1}$，即亮红灯的概率大于亮绿灯的概率，

综上所述，当 $n\geqslant 2$ 时，该提示灯亮红色灯的概率最大.　　　　………………………… 17 分

解析：

1. 【命题意图】通过教材例题创设情境，设计基础性问题，主要考查集合的概念，全集，交集与补集运算，集合的表示方法，考查运算求解能力。

【答案】C

【解析】由题可得 $M\cap N=\{4,5,6\}$，$\therefore \complement_U(M\cap N)=\{2,3,7,8\}$．也可以由 Venn 图求解．

2. 【命题意图】通过复数创设情境，设计基础性问题，主要考查复数的概念，复数运算等基础知识，考查运算求解能力。

【答案】A

【解析】由 $\dfrac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{2}=-1+\mathrm{i}$，得虚部为 1．

3. 【命题意图】通过不等式创设情境，设计基础性问题，主要考查不等式的解法，考查运算求解能力。

【答案】B

【解析】由 $\dfrac{2x-1}{x+3}<1$，得 $\dfrac{2x-1-x-3}{x+3}<0$，即 $\dfrac{x-4}{x+3}<0$，故 $-3<x<4$，故选 B．

4. 【命题意图】通过双曲线问题创设情境，设计基础性问题，主要考查双曲线的渐近线、离心率等基础知识，考查运算求解能力。

【答案】C

【解析】由已知得，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{3}$，则 $\dfrac{c}{a}=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+(\dfrac{4}{3})^2}=\dfrac{5}{3}$．

5. 【命题意图】通过二项式问题创设情境，设计基础性问题，主要考查二项式定理，展开式的通项公式，常数项等基础知识，考查运算求解能力。

【答案】D

【解析】由展开式的通项得 $T_{k+1}=C_6^k x^{6-k}(-\dfrac{2}{\sqrt{x}})^k=(-2)^k C_6^k x^{6-k-\frac{k}{2}}$，令 $6-k-\dfrac{k}{2}=0$，得 $k=4$，$\therefore$ 常数项为 $T_5=(-2)^4C_6^4=16\times15=240$．

6. 【命题意图】通过人工智能大语言模型训练创设生活实践情境，设计基础性、应用性问题，考查指数、对数的运算等基础知识，考查数学运算、数学建模等数学核心素养。

【答案】A

【解析】依题意，得 $m_0\lg200\ 000-m_0\lg2\ 000=m_0(\lg200\ 000-\lg2\ 000)=m_0\lg100=8$，则有 $2m_0=8$，解得 $m_0=4$，$\therefore T=4\lg N$．当训练 m 个单位的数据量所需的时间为 16 h 时，则有 $4\lg m=16$，解得 $m=10\ 000$．

7. 【命题意图】通过三棱锥中的线面关系问题创设情境，设计基础性问题，主要考查直线与平面垂直的判定与性质，线面角、二面角的概念等基础知识，考查直观想象、逻辑推理等核心素养。

【答案】D

【解析】由已知得，直线 $CO\perp$ 平面 AOB，$\therefore CO\perp AB$，且 $\angle CDO$ 等于直线 CD 与平面 AOB 所成的角；由线面垂直的判定定理可知，直线 $AB\perp$ 平面 CDO，由二面角的定义可知，$\angle CDO$ 是二面角 $C-AB-O$ 的平面角．于是，结论①②③均正确．

8. 【命题意图】通过函数性质创设情境，设计综合性、创新性问题，主要考查函数奇偶性、基本不等式等基础知识，考查函数性质及基本不等式的应用，考查数学抽象、逻辑推理等核心素养。

【答案】B

【解析】$\because f(-x)=\dfrac{4^{-x}-1}{4^{-x}+1}-x=\dfrac{1-4^x}{1+4^x}-x=-f(x)$，则函数 $f(x)$ 为奇函数，又由 $f(x)=1-\dfrac{2}{4^x+1}+x$，可知 $f(x)$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上单调递增．由 $f(a-1)+f(2b)=0$ 可得 $f(a-1)=-f(2b)=f(-2b)$，$\therefore a-1=-2b$，即 $a+2b=1$．又 $\because a>0,b>0$，则 $\dfrac{b}{a}+\dfrac{4}{b}=\dfrac{b}{a}+\dfrac{4(a+2b)}{b}=\dfrac{b}{a}+\dfrac{4a}{b}+8\geqslant2\sqrt{\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{4a}{b}}+8=12$，当且仅当 $\begin{cases}\dfrac{b}{a}=\dfrac{4a}{b},\\ a+2b=1,\\ a>0,b>0,\end{cases}$ 即当 $a=\dfrac{1}{5}$，$b=\dfrac{2}{5}$ 时，等号成立，$\therefore \dfrac{b}{a}+\dfrac{4}{b}$ 的最小值为 12．

9.【命题意图】本小题通过两个随机事件的关系创设情境，设计基础性问题，考查互斥事件和独立事件的概念与性质等，考查逻辑推理、数学运算等核心素养。

【答案】BD

【解析】若事件 A 与 B 互为对立事件，则必有 $P(A)=1-P(B)$，显然不成立，选项 A 错误；如果 $A\subseteq B$，则 $P(AB)=P(A)=0.4$，选项 B 正确；如果事件 A，B 互斥，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=0.9$，选项 C 错误；若事件 A，B 相互独立，则事件 A 与 $\overline{B}$，事件 $\overline{A}$ 与 B 分别相互独立，$\therefore P(\overline{B}\mid A)=P(\overline{B})=1-P(B)=0.5$，$P(B\mid\overline{A})=P(B)=0.5$，$\therefore P(\overline{B}\mid A)=P(B\mid\overline{A})$，选项 D 正确；另解：$\because P(\overline{B}\mid A)=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(A)}=\dfrac{P(A)P(\overline{B})}{P(A)}=\dfrac{0.4\times0.5}{0.4}=0.5$，$P(B\mid\overline{A})=\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\dfrac{P(\overline{A})P(B)}{P(\overline{A})}=\dfrac{0.6\times0.5}{0.6}=0.5$，$\therefore P(\overline{B}\mid A)=P(B\mid\overline{A})$.

10.【命题意图】通过正弦型函数的图象创设情境，设计基础性、综合性问题，主要考查三角函数的图象及其性质，三角函数的周期性、对称中心、特殊角的三角函数值、最值、单调性、对称轴方程等基础知识，考查逻辑推理，运算求解能力，数形结合思想，考查直观想象、数学运算、逻辑推理等核心素养。

【答案】BCD

【解析】根据函数 $f(x)$ 的图象知，$A=3$，周期 $T=4\times(\pi-\dfrac{\pi}{4})=3\pi$，$\therefore\omega=\dfrac{2\pi}{3\pi}=\dfrac{2}{3}$，选项 A 错误；由 $f(x)=3\sin(\dfrac{2}{3}x+\varphi)$，$f(\dfrac{\pi}{4})=3$，有 $3\sin(\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\pi}{4}+\varphi)=3$，即 $\sin(\dfrac{\pi}{6}+\varphi)=1$，$\therefore\dfrac{\pi}{6}+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，$\because 0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore\varphi=\dfrac{\pi}{3}$，即 $f(x)=3\sin(\dfrac{2}{3}x+\dfrac{\pi}{3})$. 由 $f(\dfrac{7\pi}{4})=3\sin(\dfrac{2}{3}\times\dfrac{7\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3})=3\sin\dfrac{3\pi}{2}=-3$，$f(2\pi)=3\sin(\dfrac{2}{3}\times2\pi+\dfrac{\pi}{3})=3\sin\dfrac{5\pi}{3}=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，选项 B 正确；$\because y=\sin x$ 的对称中心为$(k\pi,0)$，$k\in\mathbf{Z}$，令 $\dfrac{2}{3}x+\dfrac{\pi}{3}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $x=\dfrac{3}{2}k\pi-\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，当 $k=0$ 时，$x=-\dfrac{\pi}{2}$，选项 C 正确；由 $y=\sin x$ 的对称轴方程为 $x=-\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，令 $\dfrac{2}{3}x+\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，$\therefore x=-\dfrac{5\pi}{4}+\dfrac{3}{2}k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，$\therefore$ 函数 $f(x)$的对称轴方程为 $x=\dfrac{3}{2}k\pi-\dfrac{5\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，选项 D 正确.

11.【命题意图】通过直线与抛物线创设探索性情境，设计基础性、综合性、创新性问题，主要考查抛物线的定义、方程、性质，直线与抛物线的关系等基础知识，考查逻辑推理，运算求解能力，数形结合思想，考查直观想象、数学运算、逻辑推理等核心素养。

【答案】ACD

【解析】当 $a=1$ 时，T 为抛物线的焦点，根据抛物线定义可知，选项 A 正确；可设直线 PQ 的方程为 $x=my+a$，与抛物线方程联立可得 $y^2-4my-4a=0$，$\therefore y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4a$，则 $x_1+x_2=4m^2+2a$. 于是，$y_1^2+y_2^2=(y_1+y_2)^2-2y_1y_2=16m^2+8a\geqslant 8a$，选项 B 错误；设 PQ 的中点为 $M(x_0,y_0)$，则 $x_0=2m^2+4$，$y_0=2m$，$\therefore y_0^2=2x_0-8$，选项 C 正确；易知直线 PO 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1}x$，其与直线 l 的交点 R 的纵坐标为 $y_R=-\dfrac{ay_1}{x_1}=-\dfrac{ay_1}{\frac{y_1^2}{4}}=-\dfrac{4a}{y_1}=-\dfrac{4a}{\frac{-4a}{y_2}}=y_2$，故直线 $QR\perp l$，选项 D 正确.

12.【命题意图】通过教材例题为素材创设情境，设计基础性问题，主要考查两个向量平行的充要条件及其应用，考查运算求解能力。

【答案】-2

【解析】由 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$，得 $2m-(-1)\times4=0$，$\therefore m=-2$.

13.【命题意图】通过数列素材创设情境，设计基础性问题，主要考查等差数列的概念、公差、通项公式，等差中项等基础知识，解法多样，考查运算求解能力和思维灵活性。

【答案】12

【解析】**方法1**：由$\{a_n\}$为等差数列，有$a_1+a_3=2a_2$，$\because a_1+a_2+a_3=6$，$\therefore 3a_2=6$，$\therefore a_2=2$，又由$a_2+a_8=2a_5$，$\therefore a_8=2a_5-a_2=2\times7-2=12$.

方法2：设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，由题设有$\begin{cases}3a_1+3d=6,\\a_1+4d=7,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=\dfrac{1}{3},\\d=\dfrac{5}{3},\end{cases}$ $\therefore a_8=\dfrac{1}{3}+7\times\dfrac{5}{3}=\dfrac{36}{3}=12$.

14.【命题意图】通过新定义创设情境，设计综合性、创新性问题，考查函数与导数的应用，考查逻辑推理、数学运算等数学核心素养。

【答案】$\left(\dfrac{2}{e},+\infty\right)$

【解析】由$f(x)=axe^x-x^3$，得$f'(x)=a(x+1)e^x-3x^2$，$f'(x)-\dfrac{f(x)}{x}=a(x+1)e^x-3x^2-(ae^x-x^2)=axe^x-2x^2$，依题意，由$axe^x-2x^2>0$恒成立，得$a>\dfrac{2x}{e^x}$恒成立．令$g(x)=\dfrac{2x}{e^x}$，$x\in(0,+\infty)$，则$g'(x)=\dfrac{2(1-x)}{e^x}$，当$0<x<1$时，$g'(x)>0$，函数$g(x)$单调递增；当$x>1$时，$g'(x)<0$，函数$g(x)$单调递减，故当$x=1$时，函数$g(x)$在区间$(0,+\infty)$上取得极大值$g(1)=\dfrac{2}{e}$，也为区间$(0,+\infty)$上的最大值，$\therefore a>\dfrac{2}{e}$.