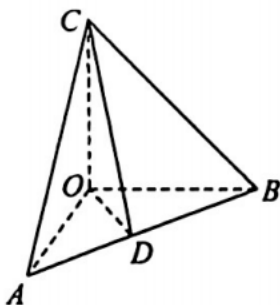


7. 如图,在三棱锥 $O-ABC$ 中, $CO \perp OA$, $CO \perp OB$, 且 CD 为 $\triangle ABC$ 中 AB 边上的高. 给出以下结论:① $CO \perp AB$;② $\angle CDO$ 等于直线 CD 与平面 AOB 所成的角;③ $\angle CDO$ 是二面角 $C-AB-O$ 的平面角. 其中,所有正确结论的序号是



- A. ①② B. ①③ C. ②③ D. ①②③

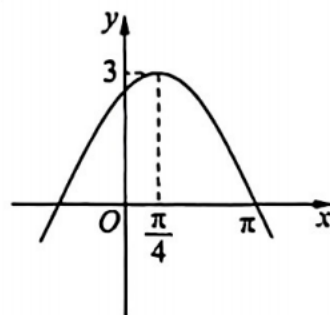
8. 已知函数 $f(x) = \frac{4^x - 1}{4^x + 1} + x$, 若正实数 a, b 满足 $f(a-1) + f(2b) = 0$, 则 $\frac{b}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值为
- A. 10 B. 12 C. 14 D. 16

二、选择题:本大题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分,选对但不全的得部分分,有选错的得 0 分.

9. 已知随机事件 A, B 满足: $P(A) = 0.4, P(B) = 0.5$, 则
- A. 事件 A 与 B 互为对立事件
- B. 如果 $A \subseteq B$, 那么 $P(AB) = 0.4$
- C. 如果事件 A, B 互斥, 那么 $P(A \cup B) = 0.5$
- D. 如果事件 A, B 相互独立, 那么 $P(\bar{B} | A) = P(B | \bar{A})$
10. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$

的部分图象如图, 则下列说法正确的是

- A. $\omega = \frac{3}{2}$
- B. $f(\frac{7\pi}{4}) < f(2\pi)$
- C. $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ 是函数 $f(x)$ 的图象的一个对称中心
- D. 函数 $f(x)$ 的对称轴方程为 $x = \frac{3}{2}k\pi - \frac{5\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$



11. 设过点 $T(a, 0)$ 的直线与抛物线 $y^2 = 4x$ 相交于 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 两点, O 为坐标原点, 则下列命题正确的是
- A. 若 $a = 1$, 则 $|PQ| = x_1 + x_2 + 2$
- B. 若 $a = 2$, 则 $y_1^2 + y_2^2$ 不存在最小值
- C. 若 $a = 4$, 则弦 PQ 的中点的轨迹方程为 $y^2 = 2x - 8$
- D. 若 $a > 0$, 直线 PO 与直线 $l: x = -a$ 相交于点 R , 则直线 $QR \perp l$

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知向量 $a = (2, -1)$, $b = (4, m)$, 且 $a \parallel b$, 则实数 $m =$ _____.

13. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_2 + a_3 = 6$, $a_5 = 7$, 则 $a_8 =$ _____.

14. 若定义在区间 D 上的函数 $f(x)$, 其导函数为 $f'(x)$, 且 $\forall x \in D, xf'(x) > f(x)$, 则称 $f(x)$ 为区间 D 上的“ M 函数”. 若 $f(x) = axe^x - x^3$ 为区间 $(0, +\infty)$ 上的“ M 函数”, 则实数 a 的取值范围是 _____.

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\sqrt{3}\sin A - \cos A = 1$.

(1) 求 A ;

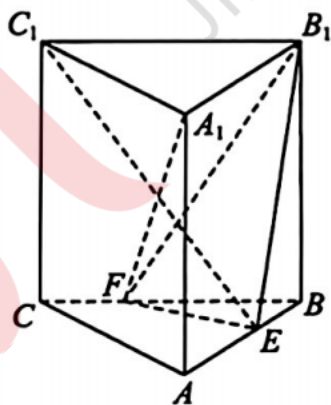
(2) 若 $b = 3$, $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

16. (15 分)

如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB \perp BC$, $AB = BC = BB_1$, E, F 分别是棱 AB, BC 上的动点, 且 $AE = BF$.

(1) 若 $A_1C_1 \parallel$ 平面 B_1EF , 判断点 E 在何位置, 并证明你的结论;

(2) 当三棱锥 $B - B_1EF$ 的体积取得最大值时, 求平面 B_1EF 与平面 BEF 的夹角的余弦值.



7. (15 分)

设函数 $f(x) = 2\ln x + ax^2 - 2(a+1)x + 3$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 证明: 存在正实数 a_0 , 使得 $a \in (0, a_0)$ 时, 函数 $f(x)$ 有且只有 3 个零点.

8. (17分)

已知直线 $l: x=4$, 椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 过椭圆 C 的右焦点 F 的直线与椭圆 C 相交于点 A, B .

(1) 判断直线 l 与以线段 AB 为直径的圆的位置关系, 并证明你的结论;

(2) 过点 F 作直线 AB 的垂线, 与直线 l 相交于点 P ,

(i) 求 $\triangle PAB$ 面积的最小值;

(ii) 证明: 直线 PA 与椭圆 C 有且只有一个公共点.

19. (17分)

某种特制提示器有红、黄、绿三种颜色的提示灯, 提示灯每隔 1 秒亮一次, 如果前一次亮红灯, 紧接着亮红灯和黄灯的概率都为 $\frac{1}{2}$; 如果前一次亮黄灯, 紧接着亮红灯和绿灯的概率分别为 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{2}{3}$; 如果前一次亮绿灯, 紧接着亮红灯和黄灯的概率都为 $\frac{1}{2}$. 现开启这种提示灯, 第一次亮红灯.

(1) 求第三次亮灯为红灯的概率;

(2) 设第 n 次亮灯为红灯的概率为 P_n , 当 $n \geq 2$ 时,

(i) 求 P_n ;

(ii) 该提示灯亮哪种颜色灯的概率最大? 为什么?