雅安市高2023级第二次诊断性考试

数学参考答案

一、选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分）

1. D　2. D　3. C　4. A　5. C　6. D　7. A　8. B

二、选择题（本大题共3小题，每小题6分，共18分）

9. ABC　10. BCD　11. BCD

三、填空题（本大题共3小题，每小题5分，共15分）

12. -5　13. ± 2　14. $\dfrac{4\sqrt{5}}{3}$

四、解答题(本大题共5小题，共77分）

15.（1）因为$EF\,/\!/$面PBC，$EF\subset$面APB，面$APB\cap$面$PBC=PB$，

所以$EF\,/\!/\,PB$……………………………………4分

（2）取AC的中点为O，连接PO、BO.

因为$AP=PC$，所以$PO\perp AC$，

因为平面$PAC\perp$平面ABC，平面$PAC\cap$平面$ABC=AC$，$PO\subseteq$平面PAC，

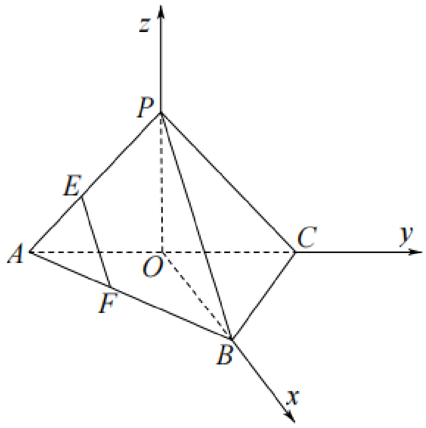
所以$PO\perp$平面ABC.

因为$\angle APC=\angle ABC=90^\circ$，$AC=2$，由$\triangle APC\cong\triangle ABC$得$BO\perp AC$.

……………………………………8分

以O为坐标原点，OB、OC、OP所在直线分别为x轴、y轴、z轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则

$A(0,-1,0)$，C（0，1，0），B（1，0，0），P（0，0，1）



所以$\overrightarrow{PB}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{PA}=(0,-1,-1)$，

设平面PAB的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\mathrm{n}\cdot\overrightarrow{PB}=x-z=0\\ \mathrm{n}\cdot\overrightarrow{PA}=-y-z=0\end{cases},$$

令$x=1$，则$z=1$，$y=-1$，所以$\mathrm{n}=(1,-1,1)$.

平面ABC的一个法向量为$\overrightarrow{OP}=(0,0,1)$，

所以$\cos\langle \mathrm{n},\overrightarrow{OP}\rangle=\dfrac{|\mathrm{n}\cdot\overrightarrow{OP}|}{|\mathrm{n}|\cdot|\overrightarrow{OP}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

所以平面PBC与平面PAB所成夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

……………………………………13分

16.（1）因为$\sqrt{3}\cos(\frac{\pi}{2}-A)+2\sin^2\frac{A}{2}=2$，

所以$\sqrt{3}\sin A+1-\cos A=2$，

故$\sin(A-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$.

……………………………………………………………………………………4分

又$A\in(0,\pi)$，故$-\frac{\pi}{6}<A-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，所以$A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，

所以$A=\frac{\pi}{3}$.

……………………………………………………………………………………7分

（2）由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得$b^2+c^2-bc=9$①

……………………………………………………………………………………9分

因为D是BC的中点，所以$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

故$(\overrightarrow{AD})^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB})^2+\frac{1}{4}(\overrightarrow{AC})^2+\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\frac{\pi}{3}$，

即$4=\frac{1}{4}c^2+\frac{1}{4}b^2+\frac{1}{4}bc$，

即$b^2+c^2+bc=16$②　……………………………………………………13分

②－①得$bc=\frac{7}{2}$，

$\therefore S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{7}{8}\sqrt{3}$.　……………………………………………………15分

17.（1）设线性回归方程为：$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，

由已知得$\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3, \bar{y}=\frac{30+36+51+60+78}{5}=51$,　…………2分

$$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_5y_5=1\times30+2\times36+3\times51+4\times60+5\times78=885,$$

$$\sum_{i=1}^{5}x_i^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_5^2=1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55,$$

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2}=\frac{885-5\times3\times51}{55-5\times3^2}=\frac{120}{10}=12,$$

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=51-12\times3=15$,

所以线性回归方程为$\hat{y}=12x+15$.

……………………………………………………………………………………7分

（2）记A_n表示事件“n次传球后球在A队员手中”，

设n次传球后球在A队员手中的概率为P_n，

则$P_1=0, A_{n+1}=\overline{A_n}\cdot A_{n+1}$，

所以 $p_{n+1}=P\left(\overline{A_n}\cdot A_{n+1}\right)=P\left(\overline{A_n}\right)\cdot P\left(A_{n+1}\mid\overline{A_n}\right)=\left(1-p_n\right)\cdot\frac{1}{2}$,

即$p_{n+1}=-\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2}$,

……………………………………………………………………………………11分

所以 $p_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}(p_n-\frac{1}{3})$，且 $p_1-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$，

所以数列$\{p_n-\frac{1}{3}\}$是以$-\frac{1}{3}$为首项，$-\frac{1}{2}$为公比的等比数列，

所以 $p_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}\times(-\frac{1}{2})^{n-1}$，即$p_n=\frac{1}{3}[1-(-\frac{1}{2})^{n-1}]$. ……………………15分

18.（1）将点（0,1）和点（1，$-\frac{\sqrt{3}}{2}$）代入$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，解得$a=2$，$b=1$，

所以C的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………………………………4分

（2）由(1)知$A(-2,0)$，$B(2,0)$，

设$P\left(x_1,y_1\right)$，$Q\left(x_2,y_2\right)$，直线PQ与x轴的交点为$M(x_0,0)$，则

$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{1}{2}|AM|\cdot|y_1-y_2|}{\frac{1}{2}|BM|\cdot|y_1-y_2|}=\frac{|AM|}{|BM|}=\frac{x_0+2}{2-x_0}=\lambda=2$，解得$x_0=\frac{2}{3}$. ………9分

即直线PQ过定点（$\frac{2}{3}$,0）. ……………………………………………………10分

（3）设直线PQ的方程为$x=my+x_0$，$P\left(x_1,y_1\right)$，$Q\left(x_2,y_2\right)$.

联立$\begin{cases}x=my+x_0,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$可得$\left(m^2+4\right)y^2+2mx_0y+x_0^2-4=0$，

则 $y_1+y_2=\frac{-2mx_0}{m^2+4}$，$y_1y_2=\frac{x_0^2-4}{m^2+4}$， ……………………………………12分

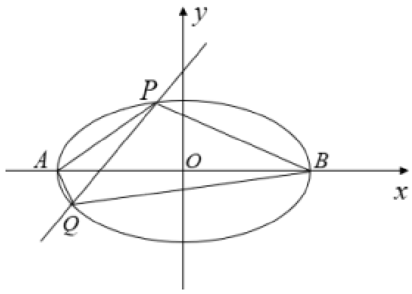
且 $y_1y_2=\frac{x_0^2-4}{-2mx_0}\left(y_1+y_2\right)$.

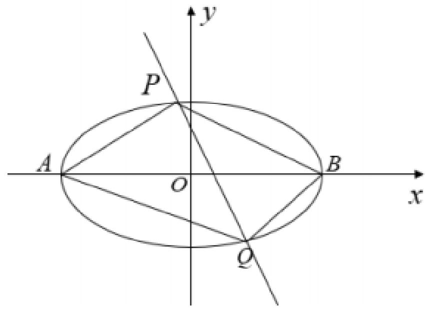
于是 $\frac{k_1}{k_2}=\frac{y_1}{x_1+2}\cdot\frac{x_2-2}{y_2}=\frac{y_1}{my_1+x_0+2}\cdot\frac{my_2+x_0-2}{y_2}=\frac{my_1y_2+y_1\left(x_0-2\right)}{my_1y_2+y_2\left(x_0+2\right)}$

$=\frac{m\cdot\left(y_1+y_2\right)\cdot\frac{x_0^2-4}{-2mx_0}+y_1\left(x_0-2\right)}{m\cdot\left(y_1+y_2\right)\cdot\frac{x_0^2-4}{-2mx_0}+y_2\left(x_0+2\right)}=-\frac{x_0-2}{x_0+2}=\frac{1}{\lambda}$，（结合第（2）问）

……………………………………………………………………………………15分

$\because \lambda>1$，$\therefore 0<\dfrac{k_1}{k_2}<1$，即$\dfrac{k_1}{k_2}$的范围是$(0,1)$. ……………………………………17分





19.（1）当$a=0$时，$f(x)=(x-1)e^x$，$f'(x)=xe^x$，

所以当$x\in(-\infty,0)$时，$f'(x)<0$，则$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减；

当$x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)>0$，则$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

所以$f(x)\geq f(0)=-1$，故$f(x)$的最小值为-1. ……………………………………3分

（2）$f'(x)=xe^x-ax=x(e^x-a)$,

当$a>0$时，令$f'(x)=0$，得$x=0$或$x=\ln a$,

当$a=1$时，$\ln a=0$，

所以当$x\in(-\infty,0)$时，$f'(x)>0$，则$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增；

当$x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)>0$，则$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；

此时$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增.

当$0<a<1$时，$\ln a<0$，

所以当$x\in(-\infty,\ln a)$时，$f'(x)>0$，则$f(x)$在$(-\infty,\ln a)$上单调递增；

当$x\in(\ln a,0)$时，$f'(x)<0$，则$f(x)$在$(\ln a,0)$上单调递减；

当$x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)>0$，则$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

当$a>1$时，$\ln a>0$，

所以当$x\in(-\infty,0)$时，$f'(x)>0$，则$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增；

当$x\in(0,\ln a)$时，$f'(x)<0$，则$f(x)$在$(0,\ln a)$上单调递减；

当$x\in(\ln a,+\infty)$时，$f'(x)>0$，则$f(x)$在$(\ln a,+\infty)$上单调递增.

综上：当$a\in(0,1)$时，$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,\ln a)$和$(0,+\infty)$，单调递减区间为$(\ln a,0)$；

当$a=1$时，$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,+\infty)$；

当$a\in(1,+\infty)$时，$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,0)$和$(\ln a,+\infty)$，单调递减区间为$(0,\ln a)$；

……………………………………………………………………………10分

（3）由（2）知当$a \le 0$时，显然仅有一个极值点$x=0$，

当$a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$时，$f(x)$存在两个极值点，且

$f(0)=-1<0, f(\ln a)=-\frac{1}{2}a[(\ln a)^2-2\ln a+2]<0$，

又由于$f(1)=-\frac{1}{2}a<0$且当$x \to +\infty$时，$f(x) \to +\infty$，

所以$f(x)$在$(1,+\infty)$存在唯一零点x_1.

若$a \in (0,1)$，由（2）知$x_0=0$，则$2x_1-x_0=2x_1>2$成立.

若$a \in (1,+\infty)$，则$\begin{cases} x_0=\ln a \\ (x_1-1)e^{x_1}-\frac{1}{2}ax_1^2=0 \end{cases} \Rightarrow e^{x_1-x_0}=\frac{x_1^2}{2(x_1-1)}$

要证$2x_1-x_0>2$，只需证$x_1-x_0>2-x_1$，即证$e^{x_1-x_0}>e^{2-x_1}$，

即证$\frac{x_1^2}{2(x_1-1)}>e^{2-x_1}$，只需证$1-\frac{2(x_1-1)e^{2-x_1}}{x_1^2}>0$.

设$g(x)=1-\frac{2(x-1)e^{2-x}}{x^2},(x>1)$，则$g'(x)=\frac{2(x^2-2)e^{2-x}}{x^3}$，

所以当$x \in (1,\sqrt{2})$时，$g'(x)<0$，则$g(x)$在$(1,\sqrt{2})$上单调递减，

当$x \in (\sqrt{2},+\infty)$时，$g'(x)>0$，则$g(x)$在$(\sqrt{2},+\infty)$上单调递增，

所以$g(x)_{\min}=g(\sqrt{2})=1-(\sqrt{2}-1)e^{2-\sqrt{2}}$，.

由（1）知当$x \in (0,1)$时，$e^x<\frac{1}{1-x}$，所以

$g(x)_{\min}=g(\sqrt{2})=1-(\sqrt{2}-1)e^{2-\sqrt{2}}>1-(\sqrt{2}-1)\cdot\frac{1}{1-(2-\sqrt{2})}=0$

所以$1-\frac{2(x_1-1)e^{2-x_1}}{x_1^2}>0$在$x_1 \in (1,+\infty)$上恒成立，

故当$a \in (1,+\infty)$时，$2x_1-x_0>2$成立.

综上，$2x_1-x_0>2$成立.　…………………………………………………………17分