雅安市高2023级第二次诊断性考试

数学试题

本试卷满分150分，答题时间120分钟。

注意事项：

1.答题前，考生务必将自己的姓名，考号用0.5毫米的黑色墨水签字笔填写在答题卡上，并检查条形码粘贴是否正确.

2.选择题使用2B铅笔填涂在答题卡对应题目标号的位置上；非选择题用0.5毫米黑色墨水签字笔书写在答题卡的对应框内，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸，试题卷上答题无效.

3.考试结束后，将答题卡收回.

一、选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分）在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的.

1. 下列关系正确的是

A. $\varnothing\in\{0\}$　　B. $\pi\in\mathbf{Q}$　　C. $\{1,1\}\subseteq\{(1,1)\}$　　D. $\{2,3\}\subseteq\{3,2\}$

2. 已知i为虚数单位，则$\mathrm{i}^{2026}=$

A. i　　B. 1　　C. $-\mathrm{i}$　　D. -1

3. 已知抛物线$x^2=2py(p>0)$上一点$(m,2)$到其焦点的距离为6，则抛物线的方程为

A. $x^2=4y$　　B. $x^2=8y$　　C. $x^2=16y$　　D. $x^2=32y$

4. 记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$a_2+a_4=10$，$a_3a_5=45$，则$S_{10}=$

A 100　　B. 95　　C. 50　　D. 15

5. 已知曲线$C_1:x^2+t^2y^2=t^2(t>1)$，曲线$C_2:x^2-4y^2=4$的离心率分别为e_1，e_2，且$e_2=\sqrt{5}e_1$，则$t=$

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

6. 若函数$f(x)=m\mathrm{e}^{-x}+\ln x$在区间$\left(\frac{1}{4},4\right)$上单调递增，则实数$m$的取值范围是

A. $[\mathrm{e}^2,+\infty)$　　B. $\left[\frac{\mathrm{e}^2}{2},+\infty\right)$　　C. $(-\infty,\sqrt{\mathrm{e}}]$　　D. $(-\infty,\mathrm{e}]$

7. 在工业级3D打印与航天精密构件设计中，圆锥结构常作为支撑部件.现有一个高为3的圆锥，其顶点为P，底面圆的圆心为O，半径为2，若A、B两点在底面圆周上，$\angle AOB=90^\circ$，M为线段AB的中点，则异面直线PM与OB所成角的正切值为

A. $\sqrt{10}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\sqrt{7}$　　D. $\frac{3}{2}$

8. 某校人工智能社团有小李、小赵等5位同学，他们计划对DeepSeek、豆包、通义千问这3种人工智能模型展开学习调研，要求：每种模型至少有1人负责，每人必须且只能选择1种模型. 若小李和小赵不能调研同一种模型，则不同的安排方案总数为

A. 144　　B. 114　　C. 94　　D. 72

二、选择题（本大题共3小题，每小题6分，共18分）在每小题给出的四个选项中，有多个符合题目要求，全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分.

9. 已知函数 $f(x)=2\sin x\cos x+2\cos^2 x-1$，则

A. 函数 $f(x)$ 的最小值为 $-\sqrt{2}$

B. 函数 $f(x)$ 的一个对称中心为 $\left(\frac{3\pi}{8},0\right)$

C. 函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right)$ 上单调递减

D. 函数 $f(x)$ 的图象可由函数 $y=\sqrt{2}\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度得到

10. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(2-x)=f(2+x)$，当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=x^3-3x$，则

A. $f(x)$ 是以4为周期的周期函数

B. 点 $(4,0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个对称中心

C. $f(2025)+f(2026)=0$

D. 函数 $y=f(x)-\left|\log_2(x+2)\right|$ 有3个零点

11. 已知菱形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$\angle BCD=120°$，现将 $\triangle ADC$ 沿对角线 AC 折起至 $\triangle PAC$，连接 PB，形成三棱锥 $P-ABC$，则

A. 当二面角 $P-AC-B$ 的大小为 $120°$ 时，平面 $PAB\perp$ 平面 PBC

B. 在折起的过程中，存在某个位置使得 $PA\perp AD$

C. 当 $\angle PAB=90°$ 时，三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

D. 当三棱锥 $P-ABC$ 的体积最大时，其外接球的表面积为 $\frac{20\pi}{3}$

三、填空题（本大题共3小题，每小题5分，共15分）将答案填在答题卡相应的横线上.

12. 已知向量 $\vec{a}=(2,3)$，$\vec{b}=(1,k)$，若 $\vec{a}\perp(\vec{a}+\vec{b})$，则 $k=$______.

13. 已知一个等比数列的前4项的和等于4，前8项的和等于68，则这个数列的公比为______.

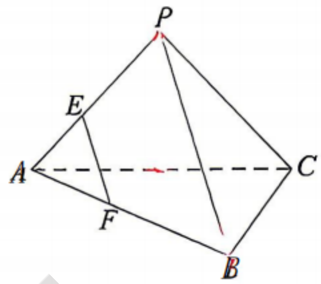
14. 已知点 $A(-1,3)$，$B(-4,3)$，动点 P 满足 $\frac{|PA|}{|PB|}=\frac{1}{2}$，记动点 P 的轨迹为曲线 Γ，点 Q 在抛物线 $C:x^2=8y$ 上运动，过点 Q 作曲线 Γ 的切线，切点分别为 M，N，则 $|MN|$ 的最小值为______.

四、解答题(本大题共5小题，共77分)解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（13分）如图，在三棱锥$P\text{-}ABC$中，E，F分别是AP，AB上的点，$\angle APC=\angle ABC=90°$ $\triangle PBC$是等边三角形，$AP=PC$.

（1）若$EF/\!/$平面PBC，证明：$EF/\!/PB$；

（2）若平面$PAC\perp$平面ABC，$AC=2$，求平面PAB与平面ABC夹角的余弦值.



16.（15分）已知$\triangle ABC$中，$\sqrt{3}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-A\right)+2\sin^2\dfrac{A}{2}=2$.

（1）求$\angle A$的大小；

（2）设D为BC的中点，$BC=3$，$AD=2$，求$\triangle ABC$的面积.

17.（15分）中国女排，曾经十度成为世界冠军，历经岁月沉淀铸就了响彻中华的女排精神. 女排精神的核心内涵为：祖国至上、团结协作、顽强拼搏、永不言败.

（1）看过女排的纪录片后，某大学掀起“学习女排精神，塑造健康体魄”的年度主题活动，一段时间后，学生的身体素质明显提高，将该大学近5个月体重达标的人数进行统计，得到如下表格：

月份x	1	2	3	4	5
体重达标的人数y	30	36	51	60	78

若该大学体重达标人数y与月份x（月份变量x依次为1，2，3，4，5）具有线性相关关系，求y关于x的经验回归方程？

（2）在某次排球训练课上，球恰好由A队员控制，此后排球仅在A队员，B队员和C队员三人中传递，传球者都等可能地将球传给另外两个人中的任何一人，求n次传球后球在A队员手中的概率.

参考公式：$$\begin{cases}\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{xy}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}\\ a=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}\end{cases}$$

18.（17分）已知椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$过点$(0,1)$和点$\left(1,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$A$，$B$分别为$C$的左、右顶点，$P$，$Q$为$C$上的两个动点，且分别位于$x$轴上、下两侧，$\triangle APQ$和$\triangle BPQ$的面积分别为$S_1$，$S_2$，记$\dfrac{S_1}{S_2}=\lambda$.

（1）求C的方程；

（2）若$\lambda=2$，证明：直线PQ过x轴上定点；

（3）若$\lambda>1$，设直线AP和直线BQ的斜率分别为k_1，k_2，求$\dfrac{k_1}{k_2}$的取值范围

19.（17分）已知函数$f(x)=(x-1)e^x-\dfrac{1}{2}ax^2$

（1）当$a=0$时，求函数$f(x)$的最小值；

（2）当$a>0$时，讨论函数$f(x)$的单调性；

（3）若函数$f(x)$存在两个极值点，设x_0为$f(x)$的极小值点，x_1为$f(x)$的零点，证明：$2x_1-x_0>2$.