高中2023级高考适应性考试

数学参考答案和评分意见

评分说明：

1. 本解答给出了一种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制定相应的评分细则。

2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4. 只给整数分。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。

1. B　2. C　3. A　4. A　5. B　6. C　7. D　8. D

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共计18分。

9. ACD　10. BD　11. ABD

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分。

12. -70　13. 2　14. $\frac{7}{3}$

四、解答题：本题共5小题，共77分。

15. (13分)

(1)由 $a\sin B=b\cos\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$ 及正弦定理，

得 $\sin A\sin B=\sin B\cos\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$，……2分

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B\neq 0$，

所以 $\sin A=\cos\left(A+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A-\frac{1}{2}\sin A$，……4分

即 $\frac{3}{2}\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A$，

得 $\tan A=\frac{\sqrt{3}}{3}$，……6分

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{6}$.……8分

(2)将 $a=2$，$b=\sqrt{3}c$，$A=\frac{\pi}{6}$ 代入 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

得 $4=3c^2+c^2-2\sqrt{3}c^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$，……9分

解得 $c^2=4$，则 $c=2$，……11分

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}c^2\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$.……13分

16. (15 分)

(1)证明：

因为 $AD\perp$ 平面 PAB，$AD\,/\!/\,BC$，

所以 $BC\perp$ 平面 PAB，则 $AB\perp BC$. ……………………2 分

又 $AB=BC$，则 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，

所以 $\angle BAC=45°$，则 $\angle DAC=45°$. ……………………3 分

又得 $AC=\sqrt{2}AB$，由已知 $AD=2AB$，于是得 $AD=\sqrt{2}AC$.

在 $\triangle ACD$ 中，$CD^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cos\frac{\pi}{4}=AC^2$，即 $CD=AC$.

所以 $\angle ADC=45°$，则 $\angle ACD=90°$，即 $CD\perp AC$. ……………………5 分

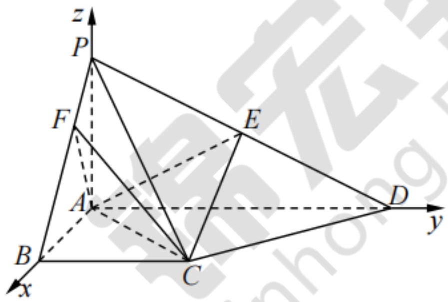
又因为 $CD\perp AP$，且 $AC\cap AP=A$，

所以 $CD\perp$ 平面 PAC. ……………………6 分

(2)由已知，$AD\perp$ 平面 PAB，可得 $AP\perp AD$，$AD\perp AB$，又由(1)知，$AP\perp CD$，

则 $AP\perp$ 平面 $ABCD$，从而 $AP\perp AB$，于是直线 AB，AD，AP 两两垂直.

如图，以 A 为原点，AB，AD，AP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.



不妨设 $AB=2$，于是 $BC=2$，$AP=2$，$AD=4$. ……………………8 分

则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,4,0)$，$P(0,0,2)$，于是 $E(0,2,1)$，$F\left(\frac{2}{3},0,\frac{4}{3}\right)$.

所以 $\overrightarrow{AE}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{AC}=(2,2,0)$，$\overrightarrow{AF}=\left(\frac{2}{3},0,\frac{4}{3}\right)$. ……………………9 分

设平面 ACE 和平面 ACF 的法向量分别为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，$\boldsymbol{n}=(a,b,c)$.

由 $\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2x+2y=0,\\ 2y+z=0,\end{cases}$ 令 $y=-1$，得 $x=1$，$z=2$，

则平面 ACE 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(1,-1,2)$. ……………………11 分

由 $\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AF}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2a+2b=0,\\ \frac{2}{3}a+\frac{4}{3}c=0,\end{cases}$ 令 $c=-1$，得 $a=2$，得 $b=-2$，

则平面 ACF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,-2,-1)$. ……………………13 分

设平面 ACE 与平面 ACF 夹角为 θ，

则 $\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{|2+2-2|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{6}}{9}$.

所以，平面 ACE 与平面 ACF 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{9}$. ……………………………………15 分

17. (15 分)

(1)由 $f(x)=x(x-a)^2-x=x^3-2ax^2+a^2x-x$，得 $f'(x)=3x^2-4ax+a^2-1$. ………2 分

因为函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有极大值，

所以 $f'(0)=a^2-1=0$，得 $a=\pm1$. ……………………………………3 分

①若 $a=1$，则 $f(x)=x^3-2x^2$，$f'(x)=3x^2-4x=x(3x-4)$，

可知，当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$；当 $0<x<\frac{4}{3}$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>\frac{4}{3}$ 时，$f'(x)>0$，

则 $x=0$ 时，$f(x)$ 取得极大值，

故 $a=1$ 符合题意. ……………………………………5 分

②若 $a=-1$，则 $f(x)=x^3+2x^2$，$f'(x)=3x^2+4x=x(3x+4)$，

可知，当 $x<-\frac{4}{3}$ 时，$f'(x)>0$；当 $-\frac{4}{3}<x<0$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，

则 $x=0$ 时，$f(x)$ 取得极小值，

故 $a=-1$ 不符合题意，舍去.

综上所述，$f(x)$ 在 $x=0$ 处有极大值时，a 的值为 1. ……………………………………7 分

(2)由(1)可知，要证 $\frac{f(x)}{e^x}<1$，即证 $\frac{x(x-1)^2-x}{e^x}<1$，只需证 $\frac{x^3-2x^2}{e^x}<1$. …………8 分

令 $g(x)=\frac{x^3-2x^2}{e^x}$，

则 $g'(x)=\frac{(3x^2-4x)e^x-(x^3-2x^2)e^x}{e^{2x}}=\frac{-x^3+5x^2-4x}{e^x}=\frac{-x(x-1)(x-4)}{e^x}$. …………10 分

当 $x<0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

当 $1<x<4$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

当 $x>4$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

故当 $x=0$ 时，$g(x)$ 取极大值，当 $x=1$ 时，$g(x)$ 取极小值，当 $x=4$ 时，$g(x)$ 取极大值.

……………………………………13 分

故只需证明 $g(0)<1$，且 $g(4)<1$ 即可.

当 $x=0$ 时，$g(x)$ 极大值 $g(0)=0<1$；

当 $x=4$ 时，$g(x)$ 极大值 $g(4)=\frac{32}{e^4}<\frac{32}{2.5^4}<1$，

所以 $g(x)<1$，即 $\frac{x^3-2x^2}{e^x}<1$ 成立，

故不等式 $\frac{f(x)}{e^x}<1$ 得证. ……………………………………15 分

18. (17 分)

(1)方法 1：

每次传球时，甲等可能地将球传给乙、丙，则甲传给乙、丙的概率均为 $\frac{1}{2}$.

第 1 次传递后，球不在甲手中，故 $P_1=0$.

第2次传递后球在甲手中，有以下两种情形：

第1次甲将球传给乙，第2次传递时乙将球传回给甲，概率为 $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$；

第1次甲将球传给丙，第2次传递时丙将球传回给甲，概率为 $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

所以，第2次传递后球在甲手中的概率为 $P_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. ………………………………3分

第3次传递后球在甲手中，则第2次传递后球在乙、丙手中，即不在甲手中，第3次传递中乙、丙将球传给甲，可得 $P_3=\left(1-\frac{2}{3}\right)\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$. ………………………………6分

方法2：

第1次传球后，球不在甲手中，第2次传递后球回到甲手中，

则第2次传递后球在甲手中的概率为 $P_2=(1-0)\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$.

第3次传递后球在甲手中，则第2次传递后球在乙、丙手中，即不在甲手中，第3次传递中乙、丙将球传给甲，可得 $P_3=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$. ………………………………6分

(2)设 A_n＝“第 n 次传递后球在甲手中”，则 $A_{n+1}=A_nA_{n+1}+\overline{A_n}A_{n+1}$.

由题意，$P(A_{n+1}|A_n)=0$，$P\left(A_{n+1}|\overline{A_n}\right)=\frac{2}{3}$，

由全概率公式，得 $P(A_{n+1})=P(A_n)P(A_{n+1}|A_n)+P\left(\overline{A_n}\right)P\left(A_{n+1}|\overline{A_n}\right)$，

所以，$P_{n+1}=P_n\times 0+(1-P_n)\times\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}P_n+\frac{2}{3}$，………………………………8分

则 $P_{n+1}-\frac{2}{5}=-\frac{2}{3}\left(P_n-\frac{2}{5}\right)$，且 $P_1=0$，

所以，数列 $\left\{P_n-\frac{2}{5}\right\}$ 是以 $P_1-\frac{2}{5}=-\frac{2}{5}$ 为首项，以 $-\frac{2}{3}$ 为公比的等比数列，

则 $P_n-\frac{2}{5}=-\frac{2}{5}\times\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$，

所以，第 n 次传递后球在甲手中的概率为 $P_n=\frac{2}{5}\left[1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]$. ………………………………12分

(3)设随机变量 $X_i=\begin{cases}1,\text{第}i\text{次传递后球在甲手中},\\0,\text{第}i\text{次传递后球不在甲手中}\end{cases}(i=1,2,\cdots,n)$.

则 X_i 服从两点分布，$P(X_i=1)=P_i=\frac{2}{5}\left[1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{i-1}\right]$，且 $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$. ………………………………14分

由题意，得 $E(Y)=E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{2}{5}-\frac{2}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^{i-1}\right]$

$$=\frac{2n}{5}-\frac{2}{5}\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{2}{3}\right)^{i-1}$$

$$=\frac{2n}{5}-\frac{2}{5}\times\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}$$

$$=\frac{2n}{5}-\frac{6}{25}\left[1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n}\right].$$ ………………………………17分

19. (17分)

(1)若选条件①:

当$x=2$时,$y^2=4p$,因为$p>1$,所以$y^2>4$,

所以点$M(2,2)$在抛物线开口内. ……2分

$|FN|$等于点N到准线$x=-\frac{p}{2}$的距离d,

所以$|MN|+|FN|=|MN|+d\geqslant 2+\frac{p}{2}$,当且仅当$MN$垂直于准线时取等号,

所以$2+\frac{p}{2}=3$,解得$p=2$.

所以,抛物线E的方程$y^2=4x$. ……4分

若选条件②:

设直线l的方程为$x=ty+\frac{p}{2}(t\neq 0)$,点$P(x_P,y_P)$,$Q(x_Q,y_Q)$.

联立方程组$\begin{cases}x=ty+\frac{p}{2},\\ y^2=2px,\end{cases}$消去$x$,整理得$y^2-2pty-p^2=0$,

所以$y_P+y_Q=2pt$,$y_Py_Q=-p^2$. ……2分

由$|PF|=2|QF|$,可得$y_P=-2y_Q$,则有$t^2=\frac{1}{8}$.

由$|PQ|=p+x_P+x_Q=p+t(y_P+y_Q)+p=\frac{9}{2}$,即$2p+2pt^2=\frac{9}{2}$,解得$p=2$.

所以,抛物线E的方程为$y^2=4x$. ……4分

(2)(i) F不能为$\triangle OCD$的重心,理由如下: ……5分

如果F是$\triangle OCD$的重心,则直线OF与CD的交点H为CD的中点,

结合点$F(1,0)$,可得H的坐标为$H(\frac{3}{2},0)$,可得直线CD的斜率为4,

直线CD的方程为$y=4x-6$, ……6分

方法1:联立方程组$\begin{cases}y=4x-6,\\ y^2=4x,\end{cases}$消去$x$,得$y^2-y-6=0$,设点$C(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$.

则$\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{1}{2}$,与$H$的纵坐标0不符,

所以F不能成为$\triangle OCD$的重心. ……8分

方法2:联立方程组$\begin{cases}y=4x-6,\\ y^2=4x,\end{cases}$消去$y$,得$4x^2-13x+9=0$,设点$C(x_1,y_1)$,$D(x_2,y_2)$.

所以$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{13}{8}$,与$H$的横坐标$\frac{3}{2}$不符,所以$F$不能成为$\triangle OCD$的重心.) ……8分

(ii)存在点G满足题目条件. 理由如下: ……9分

先取过M的一条特殊直线(使得M为CD的中点),

由$\begin{cases}y_C^2=4x_C,\\ y_D^2=4x_D,\end{cases}$得$(y_C+y_D)(y_C-y_D)=4(x_C-x_D)$.

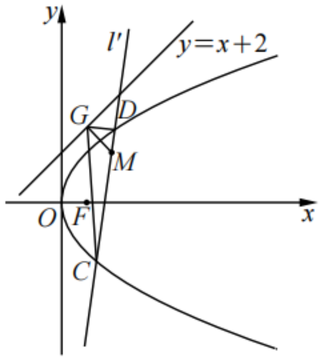
故直线CD的斜率$k_{CD}=\frac{y_C-y_D}{x_C-x_D}=\frac{4}{y_C+y_D}=1$ (其中$y_C+y_D=2y_M=4$).

所以先取特殊直线$y=x$,这条直线使得M为CD的中点.

为使 $\angle MGC=\angle MGD$，作直线 MG，使得 $MG\perp CD$，MG 与直线 $y=x+2$ 相交于 G，

直线 MG 方程为 $y=-x+4$，由 $\begin{cases}y=-x+4,\\ y=x+2,\end{cases}$ 即得 $G(1,3)$. ……………………………11分

下证点 $G(1,3)$ 符合题意，如图，



设直线 l' 的方程为：$x=m(y-2)+2=my-2m+2$，点 $C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$.

联立方程组 $\begin{cases}x=my-2m+2,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 消去 x，得 $y^2-4my+8m-8=0$，

所以 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=8m-8$. ……………………………………………………………12分

①当直线 GC 和直线 GD 的斜率都存在时，

设直线 GC：$y-3=k_1(x-1)$，直线 GD：$y-3=k_2(x-1)$，其中 $k_1\neq k_2$，$k_1k_2\neq 0$，

要证 $\angle MGC=\angle MGD$，即证点 M 到直线 GC，GD 的距离相等，

记点 M 到直线 GC，GD 的距离分别为 $d_1=\dfrac{|k_1+1|}{\sqrt{1+k_1^2}}$，$d_2=\dfrac{|k_2+1|}{\sqrt{1+k_2^2}}$.

所以 $d_1=d_2\Leftrightarrow\dfrac{|k_1+1|}{\sqrt{1+k_1^2}}=\dfrac{|k_2+1|}{\sqrt{1+k_2^2}}\Leftrightarrow k_1k_2^2+k_1=k_1^2k_2+k_2\Leftrightarrow k_1k_2=1$，即证 $k_1k_2=1$.

……………………………………………………………………………………………………14分

因为
$$
\begin{aligned}
k_1k_2&=\frac{y_1-3}{x_1-1}\cdot\frac{y_2-3}{x_2-1}=\frac{y_1-3}{m(y_1-2)+2-1}\cdot\frac{y_2-3}{m(y_2-2)+2-1}\\
&=\frac{y_1-3}{m(y_1-2)+1}\cdot\frac{y_2-3}{m(y_2-2)+1}\\
&=\frac{y_1y_2-3(y_1+y_2)+9}{m^2y_1y_2+(1-2m)m(y_1+y_2)+(1-2m)^2}\\
&=\frac{8m-8-12m+9}{m^2(8m-8)+4(1-2m)m^2+(1-2m)^2}\\
&=\frac{1-4m}{1-4m}=1
\end{aligned}
$$
成立. …………………………………………………………16分

②当直线 GC 和直线 GD 的仅有一条的斜率不存在时，不妨设直线 GC 的斜率不存在时，

此时 $C(1,-2)$，l' 的方程为 $y=4x-6$，可知 $m=\dfrac{1}{4}$，$D(\dfrac{9}{4},3)$，又 $G(1,3)$，从而 $GD\perp GC$，

直线 GM 的斜率 $k_{GM}=\dfrac{2-3}{2-1}=-1$. 此时 $\angle MGC=\angle MGD=45^\circ$，结论仍然成立.

综上所述，在直线 $y=x+2$ 上是存在定点 $G(1,3)$，使得 $\angle MGC=\angle MGD$. ………17分