高中2023级高考适应性考试

数　学

本试卷共19题，共150分，共4页。考试用时120分钟。考试结束后，将答题卡交回。

注意事项： 1.答题前，考生先将自己的姓名、考号填写在答题卡上，将条形码准确粘贴在答题卡上的条形码区域内。

2.选择题必须使用2B铅笔填涂；非选择题必须使用0.5毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整，笔记清楚。

3.请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。

4.作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。

5.保持答题卡清洁，不要折叠、不要弄破、弄皱，不使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M=\{-3,-2,-1,0,1,2\}$，$N=\left\{x\left|\dfrac{x-3}{x+2}<0\right.\right\}$，则 $M\cap N=$

A. $\{-2,-1,0,1,2\}$　　B. $\{-1,0,1,2\}$

C. $\{-2,-1,0,1\}$　　D. $\{0,1,2\}$

2. 复数 z 满足 $(1+i)z=-1+3i$，则 $|z|=$

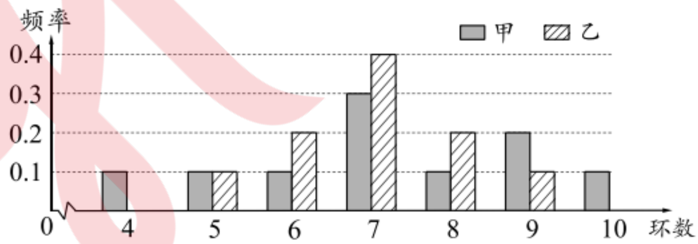
A. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　B. 2　　C. $\sqrt{5}$　　D. 5

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(m,-1)$，$\boldsymbol{b}=(m,4)$，则 $m=2$ 是 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

4. 甲、乙两名运动员在一次射击训练中各射靶80次，命中环数的频率分布条形图如下：



设甲、乙命中环数的众数分别为 $Z_{甲}$，$Z_{乙}$，方差分别为 $s_{甲}^2$，$s_{乙}^2$，则

A. $Z_{甲}=Z_{乙}$，$s_{甲}^2>s_{乙}^2$　　B. $Z_{甲}=Z_{乙}$，$s_{甲}^2<s_{乙}^2$

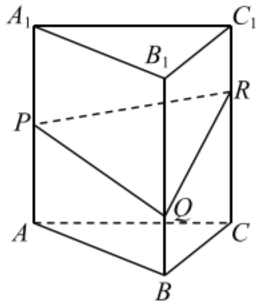
C. $Z_{甲}>Z_{乙}$，$s_{甲}^2>s_{乙}^2$　　D. $Z_{甲}<Z_{乙}$，$s_{甲}^2>s_{乙}^2$

5. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_2+a_5=5$，$a_3+2a_4=8$，则 $S_7=$

A. 15　　B. 21

C. 28　　D. 36

6. 如图，正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长都为 2，点 P, Q, R 分别在棱 AA_1, BB_1, CC_1 上，其中 $AP=PA_1$，$BQ=\frac{1}{2}QB_1$，$CR=2RC_1$，则几何体 $PQR-ABC$ 的体积为



A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

C. $\sqrt{3}$　　D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

7. 已知 O 为坐标原点，A 为椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右顶点．若椭圆 E 上存在两点 P, Q，使得以 O, A, P, Q 为顶点的四边形是正方形，则椭圆 E 的离心率为

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

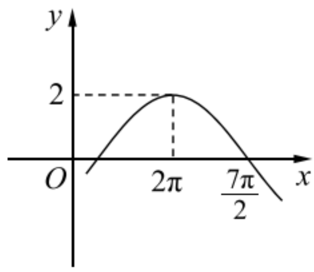
8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-3x, x\in[0,2],\\ f(x-2), x\in(2,+\infty),\end{cases}$ 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(3, f(3))$ 处的切线方程为

A. $5x-y-17=0$　　B. $5x+y-13=0$

C. $x-y-5=0$　　D. $x+y-1=0$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\ (\omega>0, -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，则



A. $f(x)$ 的最小正周期为 6π

B. $f(-\pi)=0$

C. $\varphi=-\frac{\pi}{6}$

D. 若将 $f(x)$ 的图象向右平移 π 个单位，则所得函数是偶函数

10. 某班开设了“打球”“弹琴”“跳舞”“唱歌” 4 个课外活动项目．在一次活动中，甲、乙、丙 3 名学生每人至少选 1 个、至多选 2 个项目，且每个项目恰有 1 人选择．设事件 A_1＝“甲选打球”，A_2＝“甲选唱歌”，A_3＝“乙选跳舞”，则

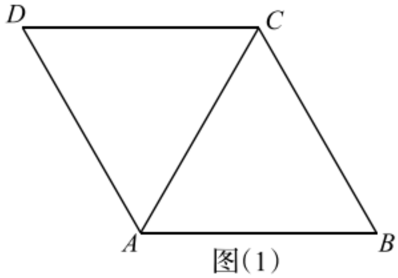
A. A_1 与 A_2 互斥

B. $P(A_2)=\frac{1}{3}$

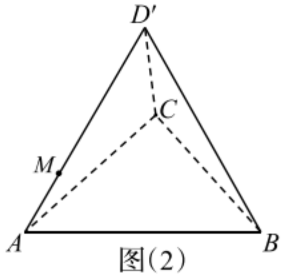
C. A_2 与 A_3 相互独立

D. $P(A_3|A_2)=\frac{5}{12}$

11. 如图(1)，菱形 $ABCD$ 的边长为 $2\sqrt{3}$，$\angle B=60^\circ$，现将 $\triangle ACD$ 沿 AC 翻折至 $\triangle D'AC$，连接 $D'B$，得到如图(2)所示的三棱锥 $D'-ABC$，在该三棱锥中，下列说法正确的有



图(1)



图(2)

A. $AC\perp BD'$

B. 若 $AD'\perp BC$，则 $CD'\perp AB$

C. 当三棱锥 $D'-ABC$ 体积最大时，BD' 与平面 ACD' 所成角为 60°

D. 若 D' 在平面 ABC 内的射影为 $\triangle ABC$ 的垂心，且 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD'}$，则过点 M 的平面截三棱锥 $D'-ABC$ 的外接球所得截面面积的最小值为 $\frac{9}{4}\pi$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 在 $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^7$ 的展开式中，含 x^4 项的系数为__________.

13. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4}=1(a>0)$ 的一条渐近线 l 被圆 $(x-a)^2+y^2=a^2$ 所截得的弦长等于 $2\sqrt{2}$，则 $a=$__________.

14. 给出如下定义：函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若 $\exists x_0\in D$，使得 $f(x_0+k)=f(x_0)+f(k)$，则称函数 $f(x)$ 具有性质 $M(k)$. 已知函数 $h(x)=\lg\frac{a}{x^2+3}(x>0)$ 具有性质 $M(2)$，则实数 a 的最小值为__________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c，已知 $a\sin B=b\cos\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$.

(1)求 A；

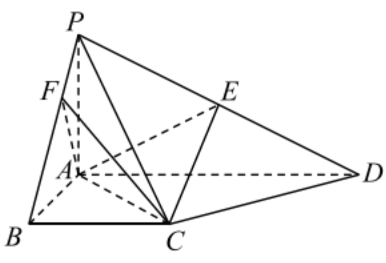
(2)若 $a=2$，$b=\sqrt{3}c$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

16. (15分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AD\perp$ 平面 PAB，$CD\perp AP$，$AD\,/\!/\,BC$，$AB=BC=\frac{1}{2}AD$.

(1)证明：$CD\perp$ 平面 PAC；

(2)若 $AP=AB$，E 为 PD 的中点，F 为棱 PB 上靠近点 P 的三等分点，求平面 ACE 与平面 ACF 夹角的余弦值.



17. (15分)

已知函数 $f(x)=x(x-a)^2-x$ 在 $x=0$ 处有极大值.

(1)求实数 a 的值;

(2)证明: $\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x}<1$.

18. (17分)

甲、乙、丙三人相互做传球训练,传球规则如下:每次传球时,甲等可能地将球传给乙、丙;乙传给甲、丙的概率分别为 $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{1}{3}$;丙传给甲、乙的概率分别为 $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{1}{3}$. 第1次由甲将球传出,记第 n 次传递后球在甲手中的概率为 P_n.

(1)求 P_2, P_3;

(2)求 P_n;

(3)已知:若随机变量 X_i 服从两点分布,且 $P(X_i=1)=1-P(X_i=0)=q_i$, $i=1, 2, \cdots, n$, 则 $E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}q_i$. 记前 n 次(即从第1次到第 n 次)传递后球在甲手中的次数为 Y,求 $E(Y)$.

19. (17分)

已知抛物线 E: $y^2=2px(p>1)$ 的焦点为 F,点 $M(2, 2)$.

条件①:动点 N 在抛物线 E 上, $|MN|+|FN|$ 的最小值为3;

条件②:过点 F 的直线 l 交抛物线 E 于 P, Q 两点, $|PF|=2|QF|$ 且 $|PQ|=\dfrac{9}{2}$.

从条件①,②中再选一个作为已知条件,解答以下问题:

(1)求抛物线 E 的方程;

(2)过点 M 的直线 l' 交抛物线 E 于 C, D 两点.

(i) 点 F 能否成为 $\triangle OCD$ 的重心(O 为坐标原点),若能,求出直线 CD 的方程;若不能,请说明理由;

(ii) 直线 $y=x+2$ 上是否存在定点 G,使得 $\angle MGC=\angle MGD$. 若存在,请求出点 G 的坐标;若不存在,请说明理由.