2023级高三第二次模拟测试
数学试题参考答案及评分意见

一、选择题：（每小题5分，共40分）

1. D；　2. A；　3. B；　4. A；　5. B；　6. C；　7. C；　8. B.

二、选择题：（每小题6分，共18分）

9. AD；　10. BCD；　11. ACD；

三、填空题：（每小题5分，共15分）

12. 2；　13. $\frac{1}{2}$；

14. $f(x)=\sin^2\frac{\pi}{2}x$ 或 $f(x)=-\frac{1}{2}\cos\pi x+\frac{1}{2}$ 或 $f(x)=|x-2k|,x\in[2k-1,2k+1],k\in Z$（答案不唯一）；

四、解答题：（共77分）

15. 解：(1)因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$ ……1分

因为 $\sin 2A-\sin(B+C)=0$，所以 $2\sin A\cos A-\sin A=0$，

所以 $\sin A(2\cos A-1)=0$ ……3分

因为 $0<A<\pi$，所以 $\sin A>0$，……4分

所以 $\cos A=\frac{1}{2}$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$ ……6分

（2）因为 AD 为 BC 边上的中线，有 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，两边同时平方可得：

$\overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})$，即 $7=\frac{1}{4}(c^2+b^2+bc)$，……8分

由重要不等式：$c^2+b^2\geqslant 2bc$（当且仅当 $b=c$ 时取得等号）得 $bc\leqslant\frac{28}{3}$. ……10分

由三角形面积公式 $S=\frac{1}{2}bc\sin A\leqslant\frac{1}{2}\times\frac{28}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$（当且仅当 $b=c=\frac{2\sqrt{21}}{3}$ 时取等），

故 ΔABC 存在最大值，最大值为 $\frac{7\sqrt{3}}{3}$. ……13分

16. 解：（1）取 PA 中点 F，连接 EF,DF.

又因为 $\lambda=1$ 时，E 是 PB 中点，所以 $EF/\!/AB$ 且 $EF=\frac{1}{2}AB$. ……1分

又因为 $CD/\!/AB$ 且 $CD=\frac{1}{2}AB$，所以 $CD/\!/EF$ 且 $CD=EF$，……2分

所以四边形 $CDFE$ 是平行四边形，

所以 $CE/\!/DF$. ……3分

又因为 $CE\not\subset$ 平面 PAD，$DF\subset$ 平面 PAD，……4分

所以 $CE/\!/$ 平面 PAD. ……5分

（2）解：因为 $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{梯形ABCD}}=\frac{AB}{AB+CD}=\frac{2}{3}$，三棱锥 $E-ABC$ 与四棱锥 $P-ABCD$ 的高之

比等于 $\dfrac{BE}{BP}=\dfrac{1}{\lambda+1}$，所以三棱锥 $E-ABC$ 与四棱锥 $P-ABCD$ 的体积之比等于 $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{\lambda+1}=\dfrac{2}{9}$，

解得 $\lambda=2$ ······························· 7 分

取 AD 中点 O，则在等腰直角三角形 PAD 中，$PO\perp AD$.

又因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，$PO\subset$ 平面 PAD，

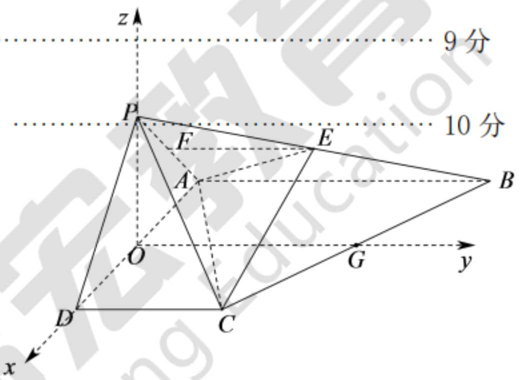
所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$.

取 BC 中点 G，则在梯形 $ABCD$ 中，$OG/\!/AB$.

又因为 $AB\perp AD$，所以 $OG\perp AD$.

以点 O 为坐标原点，分别以 $\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OG},\overrightarrow{OP}$ 的方向为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$. ······························· 8 分

则 $A(-1,0,0)$，$B(-1,2,0)$，$C(1,1,0)$，$P(0,0,1)$.



因为 $\overrightarrow{PE}=2\overrightarrow{EB}$，所以 $E(-\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3})$. ······························· 9 分

易知平面 PAD 的一个法向量 $\vec{m}=(0,1,0)$ ······························· 10 分

设平面 ACE 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

因为 $\overrightarrow{AC}=(2,1,0)$，$\overrightarrow{AE}=(\dfrac{1}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3})$，

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2x+y=0\\ \dfrac{1}{3}x+\dfrac{4}{3}y+\dfrac{1}{3}z=0\end{cases}$，令 $x=1$，则 $y=-2,z=7$

所以 $\vec{n}=(1,-2,7)$. ······························· 12 分

所以 $|\cos<\vec{m},\vec{n}>|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{6}}{9}$ ······························· 14 分

所以平面 ACE 与平面 PAB 的夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{9}$ ······························· 15 分

17. 解：（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln x+x^2-3x$， ······························· 1 分

则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+2x-3$， ······························· 2 分

所以切线斜率 $k=f'(1)=0$， ······························· 3 分

又 $\because f(1)=-2$，$\therefore$ 切点为 $(1,-2)$ ······························· 4 分

$\therefore$ 所求切线方程为 $y=-2$ ······························· 5 分

(2) $f'(x)=\frac{1}{x}+2ax-(2a+1)=\frac{2ax^2-(2a+1)x+1}{x}=\frac{(2ax-1)(x-1)}{x}$ ………………… 6 分

当 $a=0$ 时，$f'(x)=\frac{-(x-1)}{x}$，满足题意………………………………………………… 7 分

当 $a<0$ 时，$2ax-1<0$，$x\in(0,1)$ 时 $f'(x)>0$，$x\in(1,+\infty)$ 时 $f'(x)<0$ 满足题意

……………………………………………………………………………………………8 分

当 $a>0$ 时，$f'(x)=0$ 的根为 $\frac{1}{2a}$，1

若 $\frac{1}{2a}=1$，即 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)\geq 0$ 恒成立，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，与题意矛盾舍掉.

若 $\frac{1}{2a}>1$，即 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 递增，$(1,\frac{1}{2a})$ 递减，$(\frac{1}{2a},+\infty)$ 递增，与题意矛盾舍掉.

若 $\frac{1}{2a}<1$，即 $a>\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\frac{1}{2a})$ 递增，$(\frac{1}{2a},1)$ 递减，$(1,+\infty)$ 递增，与题意矛盾舍掉………………………………………………………………………………… 10 分

$\therefore$ 综上所述，a 的取值范围为 $(-\infty,0]$ ………………………………………………… 11 分

由题 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增，在区间 $(1,+\infty)$ 单调递减，$x\to 0$ 时，$f(x)\to-\infty$，$x\to+\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，又 $\because f(x)_{max}=f(1)=-a-1$ …………………………12 分

$\therefore -a-1=0$，即 $a=-1$ 时，函数 $f(x)$ 的仅有一个零点，…………………………13 分

$-a-1>0$，即 $a<-1$ 时，函数 $f(x)$ 的有两个零点，……………………………………14 分

$-a-1<0$，即 $-1<a\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 的无零点………………………………………… 15 分

18. 解：(1) 由题意得 $|NM|=|NB|$，$|NA|+|NM|=|AM|=6$，

所以 $|NA|+|NB|=6>|AB|=4$，………………………………………………………… 3 分

所以 C 是以 $A(-2,0)$，$B(2,0)$ 为焦点，6 为长轴长的椭圆，……………………… 4 分

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$. ………………………………………………………………5 分

(2) 当 $t=\frac{9}{2}$ 时，直线 QR 恒过定点 $(\frac{13}{4},0)$ ………………………………………… 6 分

由 (1) 可知点 B 为椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ 的右焦点，而 $\overline{PB}=\lambda\overline{BQ}$，$\lambda>0$ 所以 P,Q 为过右焦点 B 的直线与椭圆的交点

因为 C 与直线 l_2 均关于 x 轴对称，所以若直线 QR 过定点，该点必在 x 轴上.

…………………………………………………………………………………………… 7 分

当直线 PQ 的斜率不为零时，设直线 PQ 的方程为 $x=my+2$， $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$, $R(t,y_1)$ ……………… 8 分

由 $\begin{cases}5x^2+9y^2=45\\ x=my+2\end{cases}$ 得 $(5m^2+9)y^2+20my-25=0$

所以 $y_1+y_2=-\dfrac{20m}{5m^2+9},y_1y_2=-\dfrac{25}{5m^2+9}$ ……………… 10 分

直线 QR 的方程为 $y=\dfrac{y_1-y_2}{t-x_2}(x-t)+y_1$ ……………… 11 分

令 $y=0$，则 $x=\dfrac{-y_1(t-x_2)}{y_1-y_2}+t=\dfrac{ty_1y_2+2y_1-ty_2}{y_1-y_2}$ ……………… 12 分

因为 $\dfrac{y_1+y_2}{y_1y_2}=\dfrac{4}{5}t$，所以 $ty_1y_2=\dfrac{5}{4}(y_1+y_2)$ ……………… 14 分

所以 $x=\dfrac{\frac{5}{4}(y_1+y_2)+2y_1-ty_2}{y_1-y_2}=\dfrac{\frac{13}{4}y_1+(\frac{5}{4}-t)y_2}{y_1-y_2}$

当 $\dfrac{\frac{13}{4}}{1}=\dfrac{\frac{5}{4}-t}{-1}$，即 $t=\dfrac{9}{2}$ 时， $x=\dfrac{13}{4}$ ……………… 15 分

当直线 PQ 的斜率为零时，显然直线 QR 过点 $(\dfrac{13}{4},0)$ ……………… 16 分

所以当 $t=\dfrac{9}{2}$ 时，直线 QR 恒过定点 $(\dfrac{13}{4},0)$ ……………… 17 分

方法二：当 PQ 的斜率存在且不为零时，若直线 QR 恒过定点 $H(\dfrac{t}{2}+1,0)$，

则 $\overrightarrow{HQ}//\overrightarrow{HR}$， ……………… 10 分

而 $\overrightarrow{HQ}=(x_2-\dfrac{t}{2}-1,y_2),\overrightarrow{HR}=(\dfrac{t}{2}-1,y_1)$，

所以只需 $(x_2-\dfrac{t}{2}-1)y_1-(\dfrac{t}{2}-1)y_2=0$，

只需 $(x_2-\dfrac{t}{2}-1)(kx_1-2k)-(\dfrac{t}{2}-1)(kx_2-2k)=0$，

只需 $kx_1x_2-(\dfrac{t}{2}+1)k(x_1+x_2)+2kt=0$ ……………… 13 分

只需 $x_1x_2-(\dfrac{t}{2}+1)(x_1+x_2)+2t=0$

因为 $x_1+x_2=\dfrac{36k^2}{9k^2+5}$， $x_1x_2=\dfrac{36k^2-45}{9k^2+5}$

所以只需 $\dfrac{36k^2-45}{9k^2+5}-(\dfrac{t}{2}+1)\times\dfrac{36k^2}{9k^2+5}+2t=0$

只需 $36k^2-45-18(t+2)k^2+2t(9k^2+5)=0$

只需 $2t-9=0$

所以 $t=\dfrac{9}{2}$ ……………………………………………………………… 16 分

综上，直线 QR 恒过定点 $H(\dfrac{13}{4},0)$ …………………………………………… 17 分

19. 解：为方便表述，设事件 B_n：第 n 天该学生晨读打卡为无效打卡

（1）根据全概率公式，第 2 天为有效打卡的概率，由第 1 天有效、无效两种情况拆分：$P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(B_1)P(A_2|B_1)$，

（2）代入已知条件：$P(A_1)=\dfrac{2}{3},P(B_1)=\dfrac{1}{3},P(A_2|A_1)=\dfrac{3}{4},P(A_2|B_1)=\dfrac{1}{2}$

计算得：$P(A_2)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{3}$ ……………………………… 2 分

下面推导 $P(A_n)$ 与 $P(A_{n-1})$ 的递推式

对任意 $n\geqslant 2$，第 n 天有效打卡仅与第 $n-1$ 天结果相关，由全概率公式

$P(A_n)=P(A_{n-1})P(A_n|A_{n-1})+P(B_{n-1})P(A_n|B_{n-1})$，且 $P(B_{n-1})=1-P(A_{n-1})$

代入条件概率得 $P(A_n)=\dfrac{3}{4}P(A_{n-1})+\dfrac{1}{2}\left[1-P(A_{n-1})\right]=\dfrac{3}{4}P(A_{n-1})+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}P(A_{n-1})$

…………………………………………………………………………………… 4 分

化简得 $P(A_n)=\dfrac{1}{4}P(A_{n-1})+\dfrac{1}{2}(n\geqslant 2,n\in N^*)$ ……………………………… 5 分

（3）（ⅰ）由题知 $X_2=0$，1，2，…………………………………………… 6 分

$P(X_2=0)=P(B_1B_2)=P(B_1)P(B_2|B_1)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$

$P(X_2=2)=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{2}$

$P(X_2=1)=1-P(X_2=0)-P(X_2=2)=1-\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{3}$

故 X_2 的分布列为：

X_2	0	1	2
P	$\dfrac{1}{6}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{2}$

…………………………………………………………………………………… 9 分

所以数学期望 $E(X_2)=0\times\dfrac{1}{6}+1\times\dfrac{1}{3}+2\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{3}$ ……………………………… 10 分

（ⅱ）因为 $P(X_1=0)=\dfrac{1}{3}$，$P(X_1=1)=\dfrac{2}{3}$，则 $E(X_1)=\dfrac{2}{3}$，即 $E(X_1)-\dfrac{2}{3}=0$，

由（ⅰ）知 $E(X_2)=\frac{4}{3}$，即 $E(X_2)-\frac{2}{3}\times 2=0$ ，

猜测 $E(X_n)=\frac{2}{3}n$ ，……………………………………………………………… 12 分

设 ξ_n 为第 n 天有效打卡次数，$\xi_n=1$ 表示有效，$\xi_n=0$ 表示无效

则 $X_n=X_{n-1}+\xi_n$，因此 $E(X_n)=E(X_{n-1})+E(\xi_n)=E(X_{n-1})+P(A_n)$…………… 13 分

结合（1）中递推式 $P(A_n)=\frac{1}{4}P(A_{n-1})+\frac{1}{2}$，且 $P(A_{n-1})=E(X_{n-1})-E(X_{n-2})(n\geqslant 3)$

联立得 $E(X_n)-E(X_{n-1})=\frac{1}{4}\left[E(X_{n-1})-E(X_{n-2})\right]+\frac{1}{2}$……………………………14 分

整理得：$E(X_n)=\frac{5}{4}E(X_{n-1})-\frac{1}{4}E(X_{n-2})+\frac{1}{2},(n\geqslant 3)$（*）

即 $E(X_n)-\frac{1}{4}E(X_{n-1})=E(X_{n-1})-\frac{1}{4}E(X_{n-2})+\frac{1}{2},(n\geqslant 3)$，

由 $E(X_2)-\frac{1}{4}E(X_1)=\frac{7}{6}$ 得，$E(X_n)-\frac{1}{4}E(X_{n-1})=\frac{7}{6}+(n-2)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}n+\frac{1}{6}$，

于是 $E(X_n)-\frac{2}{3}n=\frac{1}{4}[E(X_{n-1})-\frac{2}{3}(n-1)]$ ，

结合 $E(X_1)=\frac{2}{3}$，递推得 $E(X_n)=\frac{2}{3}n$ ，……………………………………………… 16 分

实际意义：长期坚持晨读打卡后，学生有效打卡率趋于稳定值 $\frac{2}{3}$（$\frac{E(X_n)}{n}=\frac{2}{3}$），打卡状态不再随天数波动，形成稳定习惯.…………………………………………………… 17 分

说明：学生用数学归纳法证明，同样给分