成都石室中学 2024—2025 学年度上期高 2025 届八省联考模拟考试

数学参考答案

双向细目表

题号	题型	分值	难度预估	具体内容	能力层次		
					了解	理解	掌握
1	单项选择题	5	0.95	复数的运算		√	
2	单项选择题	5	0.95	函数与方程的应用		√	
3	单项选择题	5	0.95	圆和圆的位置关系		√	
4	单项选择题	5	0.9	简单的三角恒等变换		√	
5	单项选择题	5	0.85	空间中的平行与垂直关系		√	
6	单项选择题	5	0.8	平面向量的数量积			√
7	单项选择题	5	0.7	集合			√
8	单项选择题	5	0.5	函数的单调性			√
9	多项选择题	6	0.9	样本的数字特征		√	
10	多项选择题	6	0.7	三角函数的图象与性质		√	
11	多项选择题	6	0.4	解三角形的应用			√
12	填空题	5	0.9	二项式定理		√	
13	填空题	5	0.7	椭圆的简单几何性质		√	
14	填空题	5	0.5	基本不等式			√
15(1)	解答题	6	0.95	随机事件的概率			√
15(2)	解答题	7	0.9	条件概率			√
16(1)	解答题	7	0.8	函数的极值			√
16(2)	解答题	8	0.7	函数的极值			√
17(1)	解答题	7	0.75	直线与平面平行的性质			√
17(2)	解答题	8	0.6	二面角			√
18(1)	解答题	8	0.7	数列的递推公式			√
18(2)	解答题	9	0.4	数列的通项与求和			√
19(1)	解答题	4	0.7	曲线的方程			√
19(2)i)	解答题	6	0.4	直线与曲线的位置关系			√
19(2)ii)	解答题	7	0.2	直线与曲线的位置关系			√

答案及解析

1.【参考答案】D

【解题思路】$\left(2\mathrm{i}+\frac{1}{\mathrm{i}}\right)^3=(2\mathrm{i}-\mathrm{i})^3=-\mathrm{i}$. 故选 D.

2.【参考答案】A

【解题思路】由 $a+2b=14$，$2b+c=9$，$2c+3d=23$，$4d=28$，解得 $a=6$，$b=4$，$c=1$，$d=7$. 故选 A.

3.【参考答案】C

【解题思路】由题意，两圆的方程可化为$(x-4)^2+y^2=9$ 和 $x^2+(y-3)^2=4$，两圆的圆心距为 5，半径分别为 3 和 2，因此两圆外切，有 3 条公切线. 故选 C.

4.【参考答案】D

【解题思路】由题意，得 $\tan A=\tan\left[\left(A+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=-\frac{1}{3}<0$，因此 A 为钝角，所以 $\cos A=-\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 A}}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$. 故选 D.

5.【参考答案】D

【解题思路】对于 A，设 $\alpha\cap\beta=l$，取 m 和 n 均与 l 平行，则 $m/\!/n$，故 A 错误. 对于 B，可取 m 与 n 为异面直线，故 B 错误. 对于 C，取 m 为 α 与 β 的交线，可知 C 错误. 对于 D，过 n 作任意平面与 β 交于直线 l，则 $l/\!/m$，$l\perp\alpha$，从而 $\alpha\perp\beta$，故 D 正确. 故选 D.

6.【参考答案】C

【解题思路】由题意，得$\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=13$，即 $9-3|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}|^2=13$，解得$|\boldsymbol{b}|=4$(负值已舍去). 故选 C.

7.【参考答案】B

【解题思路】直接分析 3^n 与 4^n 的和除以 7 的余数的规律可知，A 是所有正奇数的集合，其前 10 个数的和等于 $1+3+5+\cdots+19=100$. 故选 B.

8.【参考答案】A

【解题思路】由于 $a>2$，所以$17^b=8^a+15^a>8^2+15^2=17^2$，因此 $b>2$. 又因为$17^{b-a}=\left(\frac{8}{17}\right)^a+\left(\frac{15}{17}\right)^a<\left(\frac{8}{17}\right)^2+\left(\frac{15}{17}\right)^2=1$，所以 $b-a<0$，即 $b<a$. 故选 A.

9.【参考答案】BC

【解题思路】不妨设 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$，则易知 $Y=|a|\cdot X$，故 A 不正确. 由平均值、中位数及方差的定义可知，B，C 正确，而 D 不正确. 故选 BC.

10.【参考答案】AC

【解题思路】$f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，因此 $f(x)$的最小正周期等于 π，故 A 正确. 由于$f(x)_{\max}=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2$，故 B 不正确. 由于 $f(x)$的对称中心为点$\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{12},0\right)(k\in\mathbf{Z})$，其中离原点最近

的一个为$\left(\frac{\pi}{12},0\right)$，故 C 正确. 取 $x_1=\frac{\pi}{2}$，$x_2=\frac{7\pi}{6}$，则 $f(x_1)=f(x_2)=1$，但 $f(x_1+x_2)=-1$，故 D 不正确. 故选 AC.

11.【参考答案】BCD

【解题思路】当 $AC=3$ 时，$AB=6$. 由三角形两边之和大于第三边，两边之差小于第三边可知，$3<BC<9$，因此$\triangle ABC$ 的周长的取值范围是$(12,18)$，故 A 错误. 由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times AB\times AC\times\sin A=9\sin A$ 可知，当 $A=90°$时，$\triangle ABC$ 的面积取到最大值 9，故 B 正确. 当 $BC=3$ 时，由 $AB+AC>BC$，即 $3AC>BC$，得 $AC>\frac{1}{3}BC=1$；由 $AB-AC<BC$，得 $AC<BC=3$，从而 $1<AC<3$，因此$\triangle ABC$ 的周长的取值范围是$(6,12)$，故 C 正确. 以 B 为原点，BC 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系，设 $C(3,0)$，$A(x,y)$，则 $\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{(x-3)^2+y^2}$，整理得$(x-4)^2+y^2=4$，因此点 A 到直线 BC 的距离的最大值为 2，则$\triangle ABC$ 的面积的最大值为 3，故 D 正确. 故选 BCD.

12.【参考答案】14

【解题思路】由于$(x+1)^8$ 的展开式中，x^5 的系数是 $C_8^3=56$，x^4 的系数是 $C_8^4=70$，因此$(x-1)(x+1)^8$ 的展开式中 x^5 的系数是 $70-56=14$.

13.【参考答案】$\sqrt{3}-1$

【解题思路】由题意可知，$\angle MF_1F_2=60°$，$\angle MF_2F_1=30°$，从而 $\angle F_1MF_2=90°$，所以 $e=\frac{|F_1F_2|}{|MF_1|+|MF_2|}=\sqrt{3}-1$.

14.【参考答案】$(0,8+4\sqrt{5}]$

【解题思路】由于 $mn\leqslant\left(\frac{m+n}{2}\right)^2=\frac{a}{4}$，当且仅当 $m=n$ 时等号成立. $\left(m+\frac{1}{m}\right)\left(n+\frac{1}{n}\right)=mn+\frac{1}{mn}+\frac{(m+n)^2-2mn}{mn}=mn+\frac{a+1}{mn}-2$. 由于函数 $y=x+\frac{a+1}{x}$在$(0,\sqrt{a+1})$上单调递减，$(\sqrt{a+1},+\infty)$上单调递增，若$\left(m+\frac{1}{m}\right)\left(n+\frac{1}{n}\right)$取最小值时有 $m=n$，则 $\sqrt{a+1}\geqslant\frac{a}{4}$，即$a^2-16a-16\leqslant 0$. 又由于 $a>0$，所以 a 的取值范围是$(0,8+4\sqrt{5}]$.

15. 解：设此人得到的卡片中红色的有 X 张，蓝色的有 Y 张，则 $X\sim B\left(4,\frac{1}{2}\right)$，$Y\sim B\left(4,\frac{1}{2}\right)$.（2 分）

(1)$P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{15}{16}$，即此人至少得到一张红色卡片的概率为$\frac{15}{16}$.（6 分）

(2)$P(Y\geqslant 1|X\geqslant 1)=\frac{P(X\geqslant 1,Y\geqslant 1)}{P(X\geqslant 1)}=\frac{1-P(X=0)-P(Y=0)}{P(X\geqslant 1)}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^4-\left(\frac{1}{2}\right)^4}{\frac{15}{16}}=\frac{14}{15}$，即若已知此人至少有一张红色卡片，则此人至少有一张蓝色卡片的概率为$\frac{14}{15}$.（13 分）

16. 解: $f'(x)=-\frac{2}{3}e^{-x}\cdot x(x+2a-2)$.(2 分)

(1)当 $a=2$ 时,$f(x)$在$(-\infty,-2)$上单调递减,$(-2,0)$上单调递增,$(0,+\infty)$上单调递减,因此 $f(x)$的极小值为 $f(-2)=\frac{1}{3}e^{2}[2\times(-2)^{2}+4\times2\times(-2)+4\times2]=0$.(7 分)

(2)当 $a=1$ 时,$f(x)$无极值;当 $a<1$ 时,$f(x)$有极小值 $f(0)$,极大值 $f(2-2a)$;当 $a>1$ 时,$f(x)$有极小值 $f(2-2a)$,极大值 $f(0)$.(10 分)

当 $a>1$ 时,由 $f(0)=\frac{4}{3}a=4$,解得 $a=3$.(11 分)

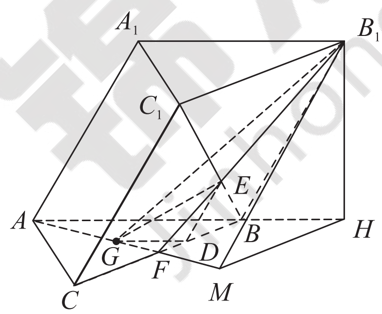
当 $a<1$ 时,$f(2-2a)=-\frac{4}{3}e^{2a-2}(a-2)=4$,即 $e^{2a-2}(a-2)=-3$.(12 分)

设 $g(a)=e^{2a-2}(a-2)$,则 $g'(a)=e^{2a-2}(2a-3)<0$,因此 $g(a)$在$(-\infty,1)$上单调递减,$g(a)>g(1)=-1$,所以 $g(a)=-3$ 无解.

综上可知,当且仅当 $a=3$ 时,$f(x)$的极大值为 4.(15 分)

17. 解:(1)如图,作 $GD\parallel AB$ 交 BC 于点 D,连接 DE,则 $BD=\frac{1}{3}BC$,且平面 $GDE\parallel$平面 ABB_1A_1.(3 分)

而平面 $GDE\cap$平面 $BCC_1B_1=DE$,平面 $ABB_1A_1\cap$平面 $BCC_1B_1=BB_1$,所以 $DE\parallel BB_1\parallel CC_1$,从而 $\frac{BE}{BC_1}=\frac{BD}{BC}=\frac{1}{3}$.(7 分)



(2)如图,延长 B_1E 交 BC 于点 F,由(1)可知 F 为 BC 中点,从而 A,G,F 三点共线.(10 分)

过点 B_1 作 $B_1H\perp AB$ 于点 H,则 $B_1H\perp$平面 ABC,且 $B_1H=\sqrt{3}$,$AH=3$.过点 H 作 $HM\perp AG$ 于点 M,则$\angle B_1MH$ 为所求二面角的平面角.(13 分)

由于$\angle HAM=30^\circ$,所以 $MH=\frac{3}{2}$,所以 $\tan\angle B_1MH=\frac{B_1H}{MH}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,即平面 B_1GE 与底面 ABC 所成的二面角的正切值为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$.(15 分)

18. (1)**解:**由题意,得 $a_2=\frac{1}{3}$,$a_3=\frac{3}{8}$,则$\frac{2}{\frac{1}{3}+\alpha}=\frac{1}{\frac{1}{4}+\alpha}+\frac{1}{\frac{3}{8}+\alpha}$,解得 $\alpha=-\frac{1}{2}$,(3 分)

则 $b_n=a_n-\frac{1}{2}$,得$\left(b_{n+1}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-b_n\right)=\frac{1}{4}$,整理得$\frac{1}{2}b_{n+1}-b_nb_{n+1}-\frac{1}{2}b_n=0$,(5 分)

即$\frac{1}{b_{n+1}}-\frac{1}{b_n}=-2$,所以$\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$为等差数列,所以当 $\alpha=-\frac{1}{2}$时,对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant2$,都有$\frac{2}{b_n}=\frac{1}{b_{n+1}}+$

$\frac{1}{b_{n-1}}$.(8 分)

(2)**证明**:由(1)得 $\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b_1}+(n-1)\cdot(-2)=-4-2(n-1)=-2n-2$,所以 $a_n=\frac{1}{2}+b_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(n+1)}=\frac{n}{2(n+1)}$,(10 分)

所以 $\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{k+1}{2(k+2)}\cdot\frac{2(k+1)}{k}=\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}=1+\frac{1}{k(k+2)}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$,$k\in\mathbf{N}^*$,(13 分)

所以 $\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_3}{a_2}+\cdots+\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left[1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]+\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\right]+\cdots+\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right]=n+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)<n+\frac{3}{4}$.(17 分)

19. 解:(1)设 $P(x,y)$,则 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}\cdot|x+2|=4$,即 $(x-2)^2(x+2)^2+y^2(x+2)^2=16$.(2 分)

令 $y=0$,得 $(x^2-4)^2=16$,解得 $x=0$ 或 $x=\pm 2\sqrt{2}$.因此,曲线 C 与 x 轴交于 $(\pm 2\sqrt{2},0)$ 与 $(0,0)$ 三点.(4 分)

(2)设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)(k\neq 0)$,与曲线 C 的方程 $(x^2-4)^2+y^2(x+2)^2=16$ 联立得 $(x^2-4)^2+k^2(x-1)^2(x+2)^2-16=0$,即 $(k^2+1)x^4+2k^2x^3-(3k^2+8)x^2-4k^2x+4k^2=0$.(6 分)

记 $f(x)=(k^2+1)x^4+2k^2x^3-(3k^2+8)x^2-4k^2x+4k^2$,则 $f(x)=0$ 至多有 4 个不相等的实数根.

i)利用 $f(x)=x^2(x^2-8)+k^2(x-1)^2(x+2)^2$,有 $f(-2\sqrt{2})=(2\sqrt{2}+1)^2(2\sqrt{2}-2)^2k^2>0$,$f(-2)=-16<0$,$f(0)=4k^2>0$,$f(1)=-7<0$,$f(2\sqrt{2})=(2\sqrt{2}-1)^2(2\sqrt{2}+2)^2k^2>0$,从而 $f(x)=0$ 在 $(-2\sqrt{2},-2)$,$(-2,0)$,$(0,1)$,$(1,2\sqrt{2})$ 上各有一个实数根.因此,$f(x)=0$ 有 4 个不相等的实数根,所以直线 l 与曲线 C 有 4 个不同的交点.(10 分)

ii)设直线 l 与曲线 C 交于点 $A_1(x_1,y_1)$,$A_2(x_2,y_2)$,$A_3(x_3,y_3)$,$A_4(x_4,y_4)$,且这 4 个点的重心为 $G(x_0,y_0)$,则由题意可知 $\begin{cases}x_0=\dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},\\ y_0=\dfrac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4},\end{cases}$ 因此 $x_0=-\frac{k^2}{2(k^2+1)}$,$y_0=\frac{k(x_1-1)+k(x_2-1)+k(x_3-1)+k(x_4-1)}{4}=k(x_0-1)$.(12 分)

显然 $x_0<0$,所以 $k=\frac{y_0}{x_0-1}$,因此 $x_0=-\frac{\left(\frac{y_0}{x_0-1}\right)^2}{2\left(\frac{y_0}{x_0-1}\right)^2+2}$,即 $x_0=-\frac{{y_0}^2}{2{y_0}^2+2(x_0-1)^2}$,整理得 $(1+2x_0){y_0}^2=-2x_0(x_0-1)^2$.由题意,得 $\left(x_0-\frac{5}{4}\right)^2+{y_0}^2=\frac{49}{16}$,(14 分)

因此 ${y_0}^2=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}x_0-{x_0}^2$,从而 $(1+2x_0)\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}x_0-{x_0}^2\right)=-2x_0(x_0-1)^2$,即 $\frac{3}{2}+\frac{11}{2}x_0+4{x_0}^2-2{x_0}^3=-2{x_0}^3+4{x_0}^2-2x_0$,解得 $x_0=-\frac{1}{5}$,即点 G 的横坐标为 $-\frac{1}{5}$.(17 分)