绵阳南山中学 2024 年春季高 2023 级 12 月月考
数学试题参考答案

一、选择题

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
选 项	B	B	B	A	C	D	B	D	ABD	BCD	AB

二、填空题

12. $\left(0,\frac{1}{24}\right)$　13. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　14. $\frac{8}{81}$

三、解答题

15.（1）设"甲胜且编号的和为 6"为事件 A．

甲编号为 x，乙编号为 y，(x,y)表示一个基本事件，

则两人摸球结果包括 $(1,2),(1,3),(1,5),\cdots,(2,1),(2,2),(5,4),(5,5)$ 共 25 个基本事件；

A 包括的基本事件有 $(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)$ 共 5 个．

$\therefore P(A)=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$．甲胜且编号的和为 6 的事件发生的概率为$\frac{1}{5}$．

（2）这种游戏不公平．

设"甲胜"为事件 B，"乙胜"为事件 C．甲胜即两个编号的和为偶数所包含基本事件数为以下 13 个：$(1,1),(1,3),(1,5),(2,2),(2,4),(3,1),(3,3),(3,5),(4,2),(4,4),(5,1),(5,3),(5,5)$．

所以甲胜的概率为 $P(B)=\frac{13}{25}$，　乙胜的概率为 $P(C)=1-\frac{13}{25}=\frac{12}{25}$，

$\because P(B)\neq P(C)$，$\therefore$这种游戏规则不公平．

16.（1）圆 $C:x^2+(y-5)^2=9$ 的圆心 $C(0,5)$，半径为 3，

设圆 C_1 的圆心坐标为(a,b)，半径为 r，

所以$\begin{cases}(a+1)^2+\left(b+\sqrt{3}\right)^2=r^2\\ a^2+(b-2)^2=r^2\\ a^2+(b-5)^2=(r+3)^2\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=0\\ b=0\\ r=2\end{cases}$，

所以圆 C_1 的方程为 $x^2+y^2=4$．

（2）若直线 l 斜率不存在，此时 l：$x=-1$，

$\begin{cases}x=-1\\ x^2+y^2=4\end{cases}$，解得 $y=\pm\sqrt{3}$，

此时弦长为$\sqrt{3}-\left(-\sqrt{3}\right)=2\sqrt{3}$，符合题意，

若直线l直线斜率存在，设l：$y+2=k\left(x+1\right)$，

因为弦长为$2\sqrt{3}$，所以圆心$C_1\left(0,0\right)$到直线l的距离$d=\sqrt{r^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=1$，

因为$l:kx-y+k-2=0$，所以$d=\dfrac{|k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=1$，解得$k=\dfrac{3}{4}$，

所以直线l的方程为$y+2=\dfrac{3}{4}\left(x+1\right)$，即$3x-4y-5=0$，

综上：直线l的方程为$x=-1$或$3x-4y-5=0$.

17.（1）由频率分布直方图可得$10\times\left(0.010+0.015\times2+a+0.025+0.005\right)=1$，解得$a=0.030$.

$\left[70,80\right)$的频率为$10a=0.3$，$\left[80,90\right)$的频率为$10\times0.025=0.25$，

$\left[90,100\right]$的频率为$10\times0.005=0.05$，按分层抽样方法抽取 12 人的成绩，

则 12 人中成绩不低于 90 分的人数为$12\times\dfrac{0.05}{0.3+0.25+0.05}=1$.

（2）该校学生首轮数学竞赛成绩的平均数为：

$10\times\left(45\times0.010+55\times0.015+65\times0.015+75\times0.030+85\times0.025+95\times0.005\right)=71$.

$\left[40,70\right)$的频率为$10\times\left(0.010+0.015+0.015\right)=0.4$，

$\left[40,80\right)$的频率为$0.4+10\times0.030=0.7$，

设中位数为x,则$x\in\left[70,80\right)$，

则$0.4+0.030\left(x-70\right)=0.5$，解得$x\approx73.33$，

故该校学生首轮数学竞赛成绩的平均数约为71分，中位数约为73.33分.

（3）设$A=$"至少有一位同学复赛获一等奖"，

则$P\left(A\right)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-\left(1-\dfrac{3}{5}\right)\times\left(1-\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{13}{15}$，

故至少有一位同学复赛获一等奖的概率为$\dfrac{13}{15}$.

18.（1）取BD中点O，连接PO，

$\because P$是BM的中点，$\therefore PO//MD$，且$PO=\dfrac{1}{2}MD$，

在线段CD上取点F，使$DF=3FC$，连接OF，QF，

AQ = 3QC，$\therefore QF//AD$，且 $QF=\frac{1}{4}AD=\frac{1}{2}MD$，

$\therefore PO//QF, PO=QF$，$\therefore$四边形 $POFQ$ 为平行四边形，$\therefore PQ//OF$，

又 $PQ\not\subset$平面 $BCD, OF\subset$平面 BCD，$\therefore PQ//$平面 BCD.

（2）$\because BC=DC=\sqrt{2}, BD=2$，则 $BC^2+DC^2=BD^2$，$\therefore BC\perp CD$，

取 BD 中点 O，则 $OB\perp OC$，又 $AD\perp$平面 $BCD, OP//AD$，$\therefore OP\perp$平面 BCD，

以 O 为原点，OB，OC，OP 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，则 $O(0,0,0), B(1,0,0), C(0,1,0), D(-1,0,0), A(-1,0,2)$，故 $P\left(0,0,\frac{1}{2}\right), M(-1,0,1)$，

则 $\overrightarrow{PM}=\left(-1,0,\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{AC}=(1,1,-2)$，$\overrightarrow{PA}=\left(-1,0,\frac{3}{2}\right)$，

AQ = 3QC，所以 $\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}=\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4},-\frac{3}{2}\right)$，故 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AQ}=\left(-\frac{1}{4},\frac{3}{4},0\right)$，

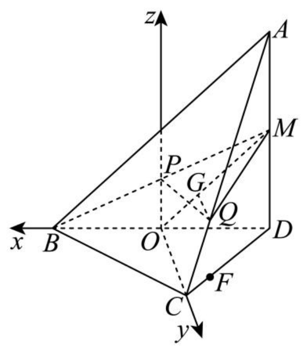
易知平面 BCD 的一个法向量为 $\vec{m}=(0,0,1)$，设平面 PQM 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PQ}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PM}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}y=0\\ -x+\frac{1}{2}z=0\end{cases}$，取 $y=1$，则 $x=3, z=6$，$\therefore\vec{n}=(3,1,6)$，

设平面 PQM 与平面 BCD 的夹角为 $\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$，

则 $\cos\theta=\left|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle\right|=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{6}{\sqrt{9+1+36}}=\frac{3\sqrt{46}}{23}$，

所以平面 PQM 与平面 BCD 夹角的余弦值为 $\frac{3\sqrt{46}}{23}$.



（3）由（2）知 O 为 BD 中点，M 为 AD 中点，连接 OM，

$\therefore AB//OM$，

$\because$点 G 为$\triangle ABD$ 内动点且 $AB//$平面 QGM，

又 $AB\subset$平面 ABD，平面 $QGM\cap$平面 $ABD=GM$，

$\therefore AB//GM$，故点 G 在 OM 上，

设 $\overrightarrow{OG}=\lambda\overrightarrow{OM}, \lambda\in(0,1)$，又 $\overrightarrow{OM}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{PO}=\left(0,0,-\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{PQ}=\left(-\frac{1}{4},\frac{3}{4},0\right)$，

则 $\overrightarrow{OG}=\lambda\overrightarrow{OM}=\lambda(-1,0,1)=(-\lambda,0,\lambda)$，

$\overrightarrow{QG}=\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{OG}=\left(-\lambda+\frac{1}{4},-\frac{3}{4},\lambda-\frac{1}{2}\right)$，

易知平面 ABD 的一个法向量为 $\vec{r}=(0,1,0)$，

设 QG 与平面 ABD 所成角为 $\varphi\left(0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right)$，则 φ 最大时， $\sin\varphi$ 最大，

$$\because \sin\varphi=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{QG},\vec{r}\right\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{QG}\cdot\vec{r}\right|}{\left|\overrightarrow{QG}\right|\left|\vec{r}\right|}=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{\left(-\lambda+\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{2\lambda^2-\frac{3}{2}\lambda+\frac{7}{8}}}=\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{2\left(\lambda-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{19}{32}}},\lambda\in(0,1),$$

所以当 $\lambda=\frac{3}{8}$ 时，$\sin\varphi$ 最大，此时 φ 最大，即当点 G 位于 $\triangle ABD$ 中位线 OM 靠近 O 的八等分点的第 3 个点处时，QG 与平面 ABD 所成角最大.

19.由题意可知，“特征三角形”是等腰三角形，且腰长为 a，底边长为 $2c$，

那么相似比就是两个“特征三角形”的长半轴长之比或者是焦距之比，

从而特征三角形相似的两椭圆的离心率是相等的.

由椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的离心率为 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

可知过点 $\left(2,\sqrt{2}\right)$，且与椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 相似的椭圆方程的离心率也为 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

可设所求椭圆为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，代点 $\left(2,\sqrt{2}\right)$ 得：$\frac{4}{a^2}+\frac{2}{b^2}=1$，

再由 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2-c^2}{a^2}=1-e^2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，所以 $a^2=2b^2$，

联立上两式解得：$a^2=8,b^2=4$，所以所求椭圆方程为：$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

（2）①由椭圆 C_2 与椭圆 C_1 的相似比为 $\sqrt{3}$，可知两椭圆的长半轴之比也为 $\sqrt{3}$，短半轴之比也为 $\sqrt{3}$，再由椭圆 $C_1:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，所以椭圆 $C_2:\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$，

当直线 m 的斜率不存在时，又与椭圆 $C_1:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 相切，则切线方程为 $x=\pm2$，

取直线 $x=2$，可得与椭圆 $C_2:\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$ 的交点坐标为 $A\left(2,\sqrt{6}\right),B\left(2,-\sqrt{6}\right)$，

此时有 $|AB|=2\sqrt{6}$，

再当直线 m 的斜率存在时，可设直线 m 的方程为 $y=kx+n$，

则与椭圆 $C_1:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 联立消 y 得：$3x^2+4\left(kx+n\right)^2=12$，

整理得：$\left(3+4k^2\right)x^2+8knx+4n^2-12=0$，

由直线m与椭圆C_1相切，可得：$\Delta=(8kn)^2-4(3+4k^2)(4n^2-12)=0$，整理得$n^2=3+4k^2$，

再由直线m的方程为$y=kx+n$，与椭圆$C_2:\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$联立消$y$得：$3x^2+4(kx+n)^2=36$，

整理得$(3+4k^2)x^2+8knx+4n^2-36=0$，

由$\Delta=(8kn)^2-4(3+4k^2)(4n^2-36)=48(-n^2+9+12k^2)$，

再把$n^2=3+4k^2$代入得：$\Delta=48(-3-4k^2+9+12k^2)=96(3+4k^2)>0$，

可设交点$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则有$x_1+x_2=\frac{-8kn}{3+4k^2},x_1\cdot x_2=\frac{4n^2-36}{3+4k^2}$，

所以$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1\cdot x_2}$

$=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\left(\frac{-8kn}{3+4k^2}\right)^2-4\frac{4n^2-36}{3+4k^2}}=4\sqrt{1+k^2}\sqrt{\frac{-3n^2+27+36k^2}{(3+4k^2)^2}}$

再把$n^2=3+4k^2$代入得：$|AB|=4\sqrt{1+k^2}\sqrt{\frac{-9-12k^2+27+36k^2}{(3+4k^2)^2}}=4\sqrt{1+k^2}\sqrt{\frac{18+24k^2}{(3+4k^2)^2}}$

$=4\sqrt{6}\sqrt{\frac{1+k^2}{3+4k^2}}=4\sqrt{6}\sqrt{\frac{\frac{1}{4}(3+4k^2)+\frac{1}{4}}{3+4k^2}}=2\sqrt{6}\sqrt{1+\frac{1}{3+4k^2}}$，

由于$k^2\geq0$，所以$\frac{1}{3+4k^2}\in\left(0,\frac{1}{3}\right]$，即$|AB|\in\left(2\sqrt{6},4\sqrt{2}\right]$，

综上可得：$|AB|\in\left[2\sqrt{6},4\sqrt{2}\right]$；

②假设直线l存在；

当l的斜率不存在时，$l:x=-1$，

由$\begin{cases}x=-1\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-1\\y=\pm\frac{3}{2}\end{cases}$，由$\begin{cases}x=-1\\3x^2+4y^2=36\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-1\\y=\pm\frac{\sqrt{33}}{2}\end{cases}$，

所以$P\left(-1,-\frac{\sqrt{33}}{2}\right),S\left(-1,\frac{\sqrt{33}}{2}\right),Q\left(-1,-\frac{3}{2}\right),R\left(-1,\frac{3}{2}\right)$，

所以$\overrightarrow{PS}=(0,\sqrt{33}),\overrightarrow{RS}=\left(0,\frac{\sqrt{33}-3}{2}\right),\overrightarrow{QS}=\left(0,\frac{\sqrt{33}-3}{2}\right)$，

所以$5\overrightarrow{PS}+2\overrightarrow{RS}=5(0,\sqrt{33})+2\left(0,\frac{\sqrt{33}-3}{2}\right)=(0,6\sqrt{33}-3),7\overrightarrow{QS}=\left(0,\frac{7\sqrt{33}-21}{2}\right)$，

显然 $5\overrightarrow{PS}+2\overrightarrow{RS}\neq 7\overrightarrow{QS}$；

当 l 的斜率存在时，$l:y=k(x+1)(k\neq 0)$，设 $Q(x_1,y_1),R(x_2,y_2),P(x_3,y_3),S(x_4,y_4)$，

联立 $\begin{cases}y=k(x+1)\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$，可得 $(3+4k^2)x^2+8k^2x+4k^2-12=0$，

所以 $x_1+x_2=-\dfrac{8k^2}{3+4k^2},x_1x_2=\dfrac{4k^2-12}{3+4k^2}$，

联立 $\begin{cases}y=k(x+1)\\3x^2+4y^2=36\end{cases}$，可得 $(3+4k^2)x^2+8k^2x+4k^2-36=0$，

所以 $x_3+x_4=-\dfrac{8k^2}{3+4k^2},x_3x_4=\dfrac{4k^2-36}{3+4k^2}$，

所以 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{x_3+x_4}{2}=-\dfrac{4k^2}{3+4k^2}$，即 QR,PS 中点的横坐标相同，

又因为 P,Q,R,S 四点共线，所以 QR 的中点即为 PS 的中点，

因为 $5\overrightarrow{PS}+2\overrightarrow{RS}=7\overrightarrow{QS}$，所以 $5|PS|+2\times\dfrac{|PS|-|QR|}{2}=7\times\dfrac{|PS|+|QR|}{2}$，

所以 $5|PS|=9|QR|$，

因为 $|QR|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(\dfrac{8k^2}{3+4k^2}\right)^2-4\left(\dfrac{4k^2-12}{3+4k^2}\right)}$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\dfrac{144+144k^2}{(3+4k^2)^2}}=\dfrac{12(1+k^2)}{3+4k^2}$，

$|PS|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_3+x_4)^2-4x_3x_4}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(-\dfrac{8k^2}{3+4k^2}\right)^2-4\left(\dfrac{4k^2-36}{3+4k^2}\right)}$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\dfrac{432+528k^2}{(3+4k^2)^2}}=\dfrac{4\sqrt{(1+k^2)(27+33k^2)}}{3+4k^2}$，

所以 $5\times\dfrac{4\sqrt{(1+k^2)(27+33k^2)}}{3+4k^2}=9\times\dfrac{12(1+k^2)}{3+4k^2}$，

所以 $5\times\sqrt{27+33k^2}=27\sqrt{1+k^2}\Leftrightarrow 5\sqrt{9+11k^2}=9\sqrt{3+3k^2}$，解得 $k=\pm\dfrac{3}{4}$，符合条件，

所以存在直线 $l:3x\pm 4y+3=0$ 满足条件.