2024 年 12 月

绵阳南山中学 2024 年秋季高 2023 级 12 月月考

数学试题

命题人：黄菊，审题人：刘国松

本测评题分试题卷和答题卷两部份，试题卷共 4 页，满分 150 分，时间 120 分钟.

注意事项：

1、答题前，请将本人的信息用0.5毫米的黑色墨水签字笔或黑色墨水钢笔填在答题卡的对应位置上；

2、选择题的答案，必须使用2B铅笔在答题卡上将所选答案对应的标号涂黑；

3、请用0.5毫米的黑色墨水签字笔或黑色墨水钢笔将每个题目的答案答在答题卷上每题对应的位置上，答在试题卷上的无效.作图一律用2B铅笔或0.5毫米黑色签字笔；

第Ⅰ卷（选择题，共 58 分）

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的.

1.研究下列问题，一般通过试验获取数据的是（　　）

A．某城市元旦前后的气温　　B．某种新型电路元件使用寿命的测定

C．电视台想知道某一个节目的收视率　　D．高中生日平均上网时间

2.直线$\sqrt{3}x-y-1=0$的倾斜角为（　　）

A．$30°$　　B．$60°$　　C．$120°$　　D．$150°$

3.双曲线$C:\dfrac{x^2}{16}-y^2=1$的渐近线方程为（　　）

A．$y=\pm 4x$　　B．$y=\pm\dfrac{x}{4}$　　C．$y=\pm\dfrac{x}{16}$　　D．$y=\pm 16x$

4.已知直线$ax+2y-2=0$与直线$2x+ay+3=0$平行，则$a=$（　　）

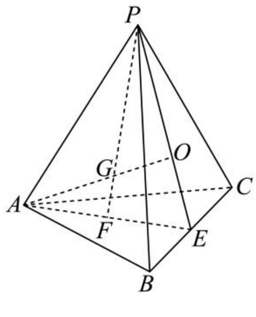
A．± 2　　B．2　　C．-2　　D．$\pm\sqrt{2}$

5．抛掷三枚硬币，若记“出现三个正面”、“两个正面一个反面”和“两个反面一个正面”分别为事件A、B和C，则下列说法错误的是（　　）

A．事件A、B和C两两互斥　　B．$P(A)+P(B)+P(C)=\dfrac{7}{8}$

C．事件A与事件$B\cup C$是对立事件　　D．事件$A\cup B$与$B\cup C$相互独立

6．如图，在三棱锥$P-ABC$中，$AB=AC=2$，$AP=3$，$\cos\angle BAP=\cos\angle CAP=\dfrac{1}{3}$，$\cos\angle BAC=\dfrac{1}{4}$，$E$为$BC$的中点，$F$为$AE$的中点，$O$为$\Delta BCP$的重心，$AO$与$PF$相交于点$G$，则$AG$的长为（　　）



A．$\dfrac{4}{5}$　　B．1　　C．$\dfrac{5}{4}$　　D．$\dfrac{3\sqrt{3}}{5}$

7．已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$的焦点为F，过焦点的直线与抛物线分别交于A、B两点，与y轴的正半轴交于点S，与准线l交于点T，且$|FA|=2|AS|$，则$\dfrac{|FB|}{|TS|}=$（　　）

A．$\dfrac{2}{5}$　　B．2　　C．$\dfrac{7}{2}$　　D．3

8.古希腊数学家阿波罗尼斯采用平面切割圆锥面的方法来研究圆锥曲线，如图1，设圆锥轴截面的顶角为2α，用一个平面Γ去截该圆锥面，随着圆锥的轴和Γ所成角β的变化，截得的曲线的形状也不同．据研究，曲线的离心率为 $e=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$，比如，当$\alpha=\beta$时，$e=1$，此时截得的曲线是抛物线．如图2，在底面半径为2，高为$\sqrt{5}$的圆锥SO中，AB、CD是底面圆O上互相垂直的直径，E是母线SC上一点，$CE=2ES$，平面ABE截该圆锥面所得的曲线的离心率为（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B．$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

C．$\dfrac{\sqrt{15}}{3}$　　D．$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

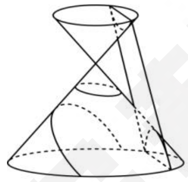


图1

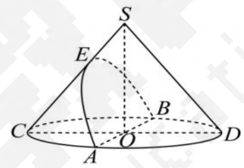
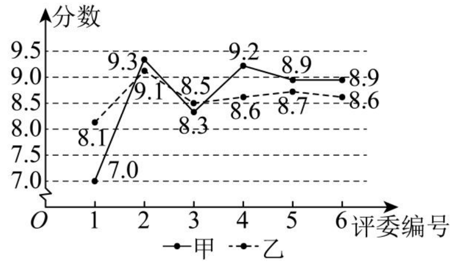


图2

二、多项选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分，在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对得6分，部分选对得部分分，有选错项得0分.

9.某校举行了交通安全知识主题演讲比赛，甲、乙两位同学演讲后，6位评委对他们的演讲分别进行打分（满分10分），得到如图所示的统计图，则（　　）



A．甲得分的中位数大于乙得分的中位数

B．甲得分的极差大于乙得分的极差

C．甲得分的第75百分位数小于乙得分的第75百分位数

D．甲得分的方差大于乙得分的方差

10.下列结论中正确的是（　　）

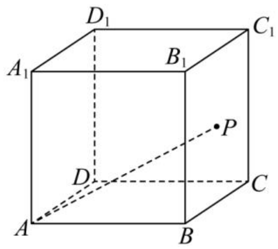
A．已知直线l过点$P(2,3)$，且在x，y轴上截距相等，则直线l的方程为$x+y-5=0$

B．已知圆$O:x^2+y^2=4$，圆$C:(x-2)^2+(y-3)^2=1$，则圆O和圆C有4条公切线

C．若直线l：$x-y+m=0$上存在点P，过点P作圆O：$x^2+y^2=4$的切线PA，PB，切点分别为A，B，使得$\angle APB$为直角，则实数m的取值范围为$[-4,4]$

D．已知圆$C:(x-6)^2+y^2=9$，点M的坐标为$(2,4)$，过点$N(4,0)$作直线l交圆C于A，B两点，则$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right|$的取值范围是$[8,12]$

11. 如图，点 P 是棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的表面上一个动点，则（　　）



A．当 P 在平面 BCC_1B_1 上运动时，三棱锥 $P-AA_1D$ 的体积为定值 $\frac{4}{3}$

B．当 P 在线段 AC 上运动时，D_1P 与 A_1C_1 所成角的取值范围是 $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$

C. 若 F 是 A_1B_1 的中点，当 P 在底面 $ABCD$ 上运动，且满足 $PF//$ 平面 B_1CD_1 时，PF 长度的最小值是 $\sqrt{5}$

D．使直线 AP 与平面 $ABCD$ 所成的角为 45° 的点 P 的轨迹长度为 $2\pi+4\sqrt{2}$

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分. 请将答案填写在答题卷中的横线上.

12. 抛物线 $y=6x^2$ 的焦点坐标为______.

13. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，M 为棱 A_1D_1 的中点，G 为侧面 CDD_1C_1 的中心，点 P,Q 分别为直线 AD，AB 上的动点，且 $PG\perp MQ$，当 $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$ 取得最小值时，点 Q 到平面 PMG 的距离为_____.

14. 在 2024 年欧洲杯某小组赛中，共有甲、乙、丙、丁四支队伍进行单循环比赛，即每两支队伍在比赛中都要相遇且仅相遇一次，最后按各队的积分排列名次（积分多者名次靠前，积分同者名次并列），积分规则为每队胜一场得 3 分，平一场得 1 分，负一场得 0 分. 若每场比赛中两队胜、平、负的概率都为 $\frac{1}{3}$，则在比赛结束时甲队胜两场且乙队胜一场的概率为_____.

四、解答题：本题共 5 小题，满分 77 分. 解答应写出必要文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（13 分）口袋中有质地、大小完全相同的 5 个球，编号分别为 1，2，3，4，5，甲、乙两人玩一种游戏：甲先摸出一个球，记下编号，放回后乙再摸一个球，记下编号，如果两个编号的和为偶数算甲赢，否则算乙赢.

(1) 求甲赢且编号的和为 6 的事件发生的概率；

(2) 请用甲、乙获胜的概率说明这种游戏规则是否公平.

16.（15 分）已知圆 $C:x^2+(y-5)^2=9$，圆 C_1 经过点 $M(-1,-\sqrt{3})$，且与圆 C 相切于点 $N(0,2)$.

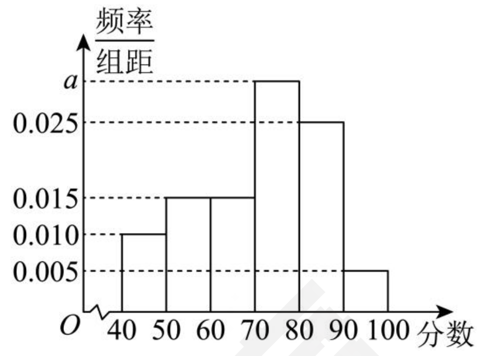
(1)求圆 C_1 的标准方程；

(2)已知直线 l 过点 $Q(-1,-2)$，且被圆 C_1 截得的弦长为 $2\sqrt{3}$，求直线 l 的方程.

17.（15 分）某校为选拔参加数学联赛的同学，先进行校内数学竞赛，为了解校内竞赛成绩，从所有学生中随机抽取 200 名学生，记录他们的首轮竞赛成绩，并作出频率分布直方图，根

据图形，请回答下列问题：

(1)求频率分布直方图中 a 的值．若从成绩不低于 70 分的同学中，按分层抽样方法抽取 12 人的成绩，求 12 人中成绩不低于 90 分的人数；



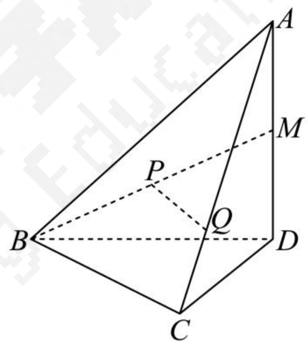
(2)用样本估计总体，估计该校学生首轮数学竞赛成绩的平均数以及中位数（保留两位小数）；

(3)若甲、乙两位同学均进入第二轮的复赛，已知甲复赛获一等奖的概率为 $\frac{3}{5}$，乙复赛获一等奖的概率为 $\frac{2}{3}$，甲、乙是否获一等奖互不影响，求至少有一位同学复赛获一等奖的概率．

18．（17 分）如图，在四面体 $ABCD$ 中，$AD\perp$ 平面 BCD，M，P 分别是线段 AD，BM 的中点，点 Q 在线段 AC 上，且 $AQ=3QC$．

(1) 求证：$PQ//$平面 BCD；

(2) 当 $BC=DC=\sqrt{2}$，$AD=BD=2$ 时，求平面 PQM 与平面 BCD 夹角的余弦值；



(3)在(2)的条件下，若 G 为 $\triangle ABD$ 内的动点，$AB//$平面 QGM 且 QG 与平面 ABD 所成的角最大，试确定点 G 的位置．

19．（17 分）由椭圆的两个焦点和短轴的一个顶点组成的三角形称为该椭圆的“特征三角形”．如果两个椭圆的特征三角形是相似三角形，则称这两个椭圆“相似”，并将特征三角形的相似比称为这两个椭圆的相似比．

(1)求经过点 $\left(2,\sqrt{2}\right)$，且与椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 相似的椭圆方程．

(2)已知椭圆 $C_1:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，椭圆 C_2 与椭圆 C_1 的相似比为 $\sqrt{3}$．

①若直线 m 与椭圆 C_1 相切，且与椭圆 C_2 交于 A,B 两点，求 $|AB|$ 的取值范围；

②过点 $\left(-1,0\right)$ 作斜率不为 0 的直线 l 与椭圆 C_1 交于 R,Q 两点（R 在 Q 的上方），直线 l 与椭圆 C_2 交于 S,P 两点（S 在 P 的上方）．是否存在直线 l，使得 $5\overline{PS}+2\overline{RS}=7\overline{QS}$？若存在，求出直线 l 的方程，若不存在，请说明理由．