2024～2025 学年度上期高中 2024 级期末考试
数学参考答案及评分标准

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8
B	B	A	D	D	C	A	C

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9	10	11
BC	AD	ABC

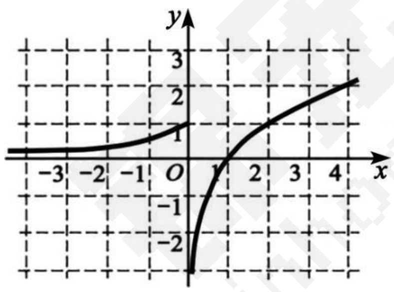
三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12．$(-1,2)\cup(2,+\infty)$　　13．$-\sqrt{3}$　　14．$a\leqslant 2$

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15．（13 分）

解：（1）如图所示：



……………………………6 分

（2）当 $x\leqslant 0$ 时，不等式为 $2^x=\frac{1}{2}$，解得 $x=-1$，　……………………………8 分

当 $x>0$ 时，不等式为 $|\log_2 x|=\frac{1}{2}$，

即 $\log_2 x=\frac{1}{2}$ 或 $\log_2 x=-\frac{1}{2}$，解得 $x=\sqrt{2}$ 或 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，　……………………………12 分

综上所述，关于 x 的方程 $|f(x)|-\frac{1}{2}=0$ 的解为 -1，$\sqrt{2}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}$．　……………………………13 分

16．（15 分）

解：（1）等式 $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$ 两边同时平方得 $1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{25}$，

$\therefore \sin\alpha\cos\alpha=-\frac{12}{25}$，　……………………………3 分

$\because 0<\alpha<\pi$，又 $\because \sin\alpha\cos\alpha<0$，易知 $\sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$，

$\therefore \sin\alpha-\cos\alpha>0$，　……………………………4 分

又 $\because (\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=1+\frac{24}{25}=\frac{49}{25}$，

$\therefore \sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{\frac{49}{25}}=\frac{7}{5}$；　……………………………7 分

（2）$\because x^2-3x<0$，解得 $0<x<3$，$\therefore B=\{x\mid 0<x<3\}$ ……………………………9 分

$\because A\subseteq B$，

①当 $A=\varnothing$ 时，可得 $a+1\geqslant 3a-2$，解得 $a\leqslant\dfrac{3}{2}$， ……………………………11 分

②当 $A\neq\varnothing$ 时，可得 $\begin{cases}a+1<3a-2,\\ a+1\geqslant 0,\\ 3a-2\leqslant 3,\end{cases}$ 解得 $\dfrac{3}{2}<a\leqslant\dfrac{5}{3}$， ……………………………14 分

综上可知实数 a 的取值范围为 $(-\infty,\dfrac{5}{3}]$. ……………………………15 分

17.（15 分）

解：（1）由题意知：$y_0=95$，$y_S=20$，当 $x=2$ 时，$y=80$，

代入函数模型为 $80=75\mathrm{e}^{-2k}+20$，即 $\dfrac{4}{5}=\mathrm{e}^{-2k}$，即 $\ln\dfrac{4}{5}=\ln\mathrm{e}^{-2k}$， ……………………………3 分

$\therefore k=-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{4}{5}=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{4}$； ……………………………5 分

（2）当 $x=8$ 时，$y=75\mathrm{e}^{-8k}+20=75(\mathrm{e}^{-2k})^4+20=75(\dfrac{4}{5})^4+20=50.72$， ……………………………11 分

又 $\because 50.72>40$，

$\therefore$ 8 min 后该杯茶水不宜于饮用. ……………………………15 分

18.（17 分）

解：（1）$\because\begin{cases}2-x>0,\\ 2+x>0,\end{cases}$ 解得 $x\in(-2,2)$，

$\therefore f(x)$ 的定义域为 $(-2,2)$， ……………………………2 分

$\forall x\in(-2,2)$，有 $-x\in(-2,2)$，$f(-x)=\ln(2+x)+\ln(2-x)=f(x)$，

$\therefore$ 函数 $y=f(x)$ 为偶函数； ……………………………4 分

（2）函数 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上单调递减，证明如下： ……………………………6 分

$\forall x_1,\ x_2\in(0,2)$，且 $x_1<x_2$，

$f(x_1)-f(x_2)=\ln(2-x_1)+\ln(2+x_1)-\ln(2-x_2)-\ln(2+x_2)=\ln\dfrac{4-x_1^2}{4-x_2^2}$， ……………………………8 分

又 $\because 0<x_1<x_2<2$，

$\therefore 0<x_1^2<x_2^2<4$，$\therefore 4-x_1^2>4-x_2^2$，$\therefore\dfrac{4-x_1^2}{4-x_2^2}>1$，

$\therefore\ln\dfrac{4-x_1^2}{4-x_2^2}>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，

$\therefore f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上单调递减； ……………………………11 分

（3）$\because$ 由函数知 $f(\sqrt{3})=0$，$f(kx-1)>0$，

即 $f(kx-1)>f(\sqrt{3})$，

又 $\because f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上单调递减，且 $f(x)$ 是区间 $(-2,2)$ 上的偶函数，

$\therefore$ 容易有 $|kx-1|<\sqrt{3}$， ……………………………14 分

$\therefore$ 有 $-\sqrt{3}<kx-1<\sqrt{3}$ 恒成立，

又 $\because -\sqrt{3}<kx-1<\sqrt{3}$ 符合定义域要求（即：$-2<kx-1<2$），

由一次函数的单调性知：$\begin{cases}2k-1<\sqrt{3},\\ -2k-1>-\sqrt{3},,\\ k>0,\end{cases}$

解得 $0<k<\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$. ……………………………17 分

19．（17 分）

解：（1）$f(x)=2^x(x\in A)$ 不是 $L-$ 函数，…………………………2 分

$g(x)=x^2(x\in A)$ 是 $L-$ 函数；…………………………4 分

（附（1）的证明：不妨设 $1\leqslant x\leqslant k-1$，$k\geqslant 2$，

若 $f(x)=2^x(x\in A)$，则 $\dfrac{f(x+1)}{f(x)}=\dfrac{2^{x+1}}{2^x}=2$，

$\therefore$ $f(x)=2^x(x\in A)$ 不是 $L-$ 函数；

若 $g(x)=x^2(x\in A)$，则 $\dfrac{g(x+1)}{g(x)}=\dfrac{(x+1)^2}{x^2}=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2}=(\dfrac{1}{x})^2+\dfrac{2}{x}+1$，

令 $t=\dfrac{1}{x}$，函数 $y=t^2+2t+1$ 在 $(0,1]$ 上单调，即对任意的 $y_1=y_2$ 恒有 $t_1=t_2$，

$\therefore$ $g(x)=x^2(x\in A)$ 是 $L-$ 函数）

（2）（i）若 $card(B)=1$，不妨设 $B=\{a\}$，则 $\dfrac{h(2)}{h(1)}=\dfrac{h(3)}{h(2)}=\cdots=\dfrac{h(7)}{h(6)}=1$，

显然不满足 $h(x)$ 是 $L-$ 函数，…………………………5 分

若 $card(B)=2$，不妨设 $B=\{b_1,b_2\}$，则 $h(1),h(2),\cdots,h(7)$ 的值为 b_1 或 b_2，

从 $\{b_1,b_2\}$ 选取可以相同的两数作商，不同的结果有 $2\times1+1=3$ 个，

则 $\dfrac{h(2)}{h(1)}$，$\dfrac{h(3)}{h(2)}$，…，$\dfrac{h(7)}{h(6)}$ 必出现相同的结果，不满足 $h(x)$ 是 $L-$ 函数；…………7 分

若 $card(B)=3$，不妨设 $B=\{c_1,c_2,c_3\}$，则 $h(1),h(2),\cdots,h(7)$ 的值为 c_1，c_2 或 c_3，

又从 $B=\{c_1,c_2,c_3\}$ 选取可以相同的两数作商，不同的结果最多有 $3\times2+1=7$ 个，

比如 $h(1)=1$，$h(2)=1$，$h(3)=2$，$h(4)=3$，$h(5)=2$，$h(6)=1$，$h(7)=3$，

此时 $\dfrac{h(2)}{h(1)}$，$\dfrac{h(3)}{h(2)}$，…，$\dfrac{h(7)}{h(6)}$ 全不相等，满足 $h(x)$ 为 $L-$ 函数，…………………………9 分

由以上推导可知，$card(B)\geqslant 4$ 显然成立，所以 $card(B)\geqslant 3$，

$\therefore$ $card(B)$ 的最小值为 3；…………………………10 分

（ii）由于 $card(B)=5$，不妨设 $B=\{d_1,d_2,d_3,d_4,d_5\}$，

从 $B=\{d_1,d_2,d_3,d_4,d_5\}$ 选取可以相同的两数作商，不同的结果最多有 $5\times4+1=21$ 个，

又$\because$ 函数 $h(x)$ 为 $L-$ 函数，则 $\dfrac{h(2)}{h(1)}$，$\dfrac{h(3)}{h(2)}$，…，$\dfrac{h(22)}{h(21)}$ 全不相同，即分别为 21 个不同的值，

又$\because$ $B\subseteq\mathbf{N}^*$，并且任意两个不同的数作商结果不同，

使 d_1,d_2,d_3,d_4,d_5 之和最小且满足上述要求的集合 $B=\{1,2,3,5,7\}$，…………………………14 分

如：$h(1),h(2),h(3),\cdots,h(22)$ 的取值分别为 $1,1,2,3,5,7,5,3,2,1,3,7,3,1,5,2,5,1,7,2,7,1$

则 $h(1)+h(2)+\cdots+h(22)\geqslant 4(1+2+3+5+7)+1+1=74$，

$\therefore$ $h(1)+h(2)+\cdots+h(22)$ 的最小值为 74．…………………………17 分

解析：

1．解：$\because x\in B\Rightarrow x\in A$，反之不成立，$\therefore$“$x\in A$”是“$x\in B$”的必要不充分条件，故选 B．

2．解：由题知终边与角 α 相同的角的集合为 $\{\beta\mid\beta=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\}(k\in\mathbf{Z})$，故选 B．

3．解：由幂函数的性质可知 $y=x^{-2}$ 既是偶函数又是 $(0,+\infty)$ 上的减函数，故选 A．

4．解：$f(a)+f(b)=\log_3 a+\log_3 b=\log_3 ab=1$，有 $f(a^2)+f(b^2)=\log_3 a^2+\log_3 b^2=2\log_3 ab=2$，故选 D．

5．解：$\because \log_a b<\log_a a=1=\log_b b<\log_b a$，故选 D．

6．解：设总成本为 y 元，则 $y=\dfrac{400+0.25x^2}{x}=\dfrac{400}{x}+0.25x$，$x\in\mathbf{N}^*$，

又$\because \dfrac{400}{x}+0.25x\geqslant 2\sqrt{\dfrac{400}{x}\times 0.25x}=20$，当且仅当“$\dfrac{400}{x}=0.25x$”，即“$x=40$”时，

取“=”，故选 C．

7．解：$\because g(x)$ 的两根 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$，若 $a>b>0$，则 $0<\dfrac{b}{a}<1$，此时 $-1<-\dfrac{b}{a}<0$，所以 B 错误，若 $b>a>0$，

则 $\dfrac{b}{a}>1$，此时 $-\dfrac{b}{a}<-1$，所以 C 与 D 错误，故选 A．

8．解：当零点为 1，2 时，有 $a<-1$；当零点为 -1，1 时，2 也必为 $f(x)$ 的零点，不符合题意；

当零点为 -1，2 时，$1\leqslant a<2$，综上所述，实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-1)\cup[1,2)$，故选 C．

9．解：$\complement_{\mathrm{U}}A=\{2,4,5\}$，$\complement_{\mathrm{U}}B=\{3,5\}$，A 错误；$\complement_{\mathrm{U}}A$ 有 3 个元素，B 正确；$(A\cup B)=\{1,2,3,4\}$，$\complement_{\mathrm{U}}(A\cup B)=\{5\}$，

C 正确；$(\complement_{\mathrm{U}}A)\cup(\complement_{\mathrm{U}}B)=\complement_{\mathrm{U}}(A\cap B)=\{2,3,4,5\}$，D 错误，故选 BC．

10．解：$\because |x|-1\neq 0$，$\therefore$ 定义域为 $\{x\mid x\neq 1 且 x\neq -1\}$，A 正确；$\because f(-2)=2$，$f(2)=2$，B 错误；又$\because f(2)=2$，

$f(3)=1$，C 错误；$\because f(-x)=f(x)$，$\therefore f(x)$ 是偶函数，当 $0\leqslant x<1$ 时，$f(x)\in(-\infty,-2]$，当 $x>1$ 时，

$f(x)\in(0,+\infty)$，$\therefore f(x)$ 的值域为 $(-\infty,-2]\cup(0,+\infty)$，D 正确，故选 AD．

11．解：若 $\exists x_1$，$x_2\in[1,3]$，使 $|f(x_1)-f(x_2)|=1$ 成立，又$\because f(x)$ 在 $[1,3]$ 上连续且单调，

$\therefore f(x)$ 的最大值与最小值之差不小于 1，

当 $a>1$ 时，$f(x)$ 的最大值为 $f(3)=\log_a(3+a)$，最小值为 $f(1)=\log_a(1+a)$，

根据题意可得 $\log_a(3+a)-\log_a(1+a)\geqslant 1$，即 $a^2+a\leqslant 3+a$，解得 $1<a\leqslant\sqrt{3}$；

当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 的最大值为 $f(1)=\log_a(1+a)$，最小值为 $f(3)=\log_a(3+a)$，

根据题意可得 $\log_a(1+a)-\log_a(3+a)\geqslant 1$，即 $a^2+3a\geqslant 1+a$，解得 $\sqrt{2}-1\leqslant a<1$，

综上，实数 a 的取值范围为 $\{a\mid\sqrt{2}-1\leqslant a\leqslant\sqrt{3}$ 且 $a\neq 1\}$，故选 ABC．

12．解：$\because x+1>0$，且 $x-2\neq 0$，解得 $x>-1$，且 $x\neq 2$，故填：$(-1,2)\cup(2,+\infty)$．

13．解：由三角函数的定义知 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$，角 α 为第二象限角，所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，继而

$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\sqrt{3}$，故填：$-\sqrt{3}$．

14．解：因为 $f(x)=4^x-2^{x+a}+1=(2^x)^2-2^a\times 2^x+1$，令 $t=2^x$，$t>0$，原函数可化为关于 t 的函数 $y=t^2-2^a\times t+1$，对任意的 x_1，$x_2\in[1,+\infty)$，若 $f(x_1)=f(x_2)$，恒有 $x_1=x_2$，则函数在 $[1,+\infty)$ 上单调，即关于 t 的函数 $y=t^2-2^a\times t+1$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调，$\therefore 2^{a-1}\leqslant 2$，解得 $a\leqslant 2$，故填 $a\leqslant 2$．