2024～2025 学年度上期高中 2024 级期末考试

数 学

考试时间 120 分钟，满分 150 分

注意事项：

1. 答题前，考生务必在答题卡上将自己的姓名、座位号、准考证号用 0.5 毫米的黑色签字笔填写清楚，考生考试条形码由监考老师粘贴在答题卡上的“贴条形码区”。

2. 选择题使用 2B 铅笔填涂在答题卡上对应题目标号的位置上，如需改动，用橡皮擦擦干净后再填涂其它答案；非选择题用 0.5 毫米的黑色签字笔在答题卡的对应区域内作答，超出答题区域答题的答案无效；在草稿纸上、试卷上答题无效。

3. 考试结束后由监考老师将答题卡收回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．若集合 $A=\{x\mid x>2\}$，集合 $B=\{x\mid x\geqslant 3\}$，则“ $x\in A$ ”是“ $x\in B$ ”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

2. 在平面直角坐标系 xOy 中，若角 α 的始边与 x 轴的非负半轴重合，终边落在直线 $y=x$ 上，则终边与角 α 相同的角的集合为

A．$\{\beta\mid\beta=\frac{\pi}{4}$ 或 $\beta=\frac{3\pi}{4}\}$　　B．$\{\beta\mid\beta=\frac{\pi}{4}+k\pi\}(k\in\mathbf{Z})$

C．$\{\beta\mid\beta=\frac{\pi}{4}+2k\pi\}(k\in\mathbf{Z})$　　D．$\{\beta\mid\beta=\frac{3\pi}{4}+2k\pi\}(k\in\mathbf{Z})$

3．下列函数既是偶函数又是区间 $(0,+\infty)$ 上的减函数的是

A．$y=x^{-2}$　　B．$y=x^{-1}$　　C．$y=x^{\frac{1}{2}}$　　D．$y=x^{2}$

4．已知函数 $f(x)=\log_3 x$，若 $f(a)+f(b)=1$，则 $f(a^2)+f(b^2)=$

A．9　　B．6　　C．4　　D．2

5．若实数 a，b 满足 $a>b>1$，则下列不等式成立的是

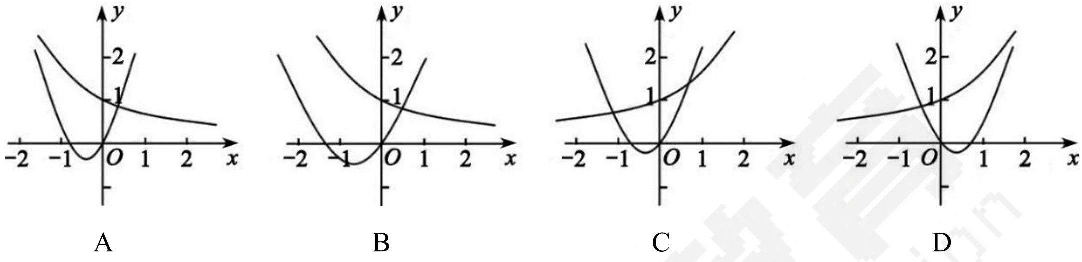
A．$\mathrm{e}^{b-a}<0$　　B．$\lg(a-b)>0$

C．$a^b>b^a$　　D．$\log_a b<\log_b a$

6．已知某糕点店制作一款面包的固定成本为400元，每次制作 x 个，每天每个面包的存留成本为1元，若每个面包的平均存留时间为 $0.25x$ 天，为了使每个面包的总成本最小，则每天应制作

A．20个　　B．30个　　C．40个　　D．50个

7．若正实数 a，b 满足 $a \neq b$，则函数 $f(x)=(\frac{b}{a})^x$ 与函数 $g(x)=ax^2+bx$ 的图象可能是



8．若函数 $f(x)=\begin{cases} x+1，x \leqslant a， \\ x^2-3x+2，x>a \end{cases}$ 恰有两个零点，则实数 a 的取值范围为

A．$(-\infty,1]\cup(2,+\infty)$　　B．$(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$

C．$(-\infty,-1)\cup[1,2)$　　D．$(-1,1]\cup(2,+\infty)$

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

9．已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，集合 $A=\{1,3\}$，集合 $B=\{1,2,4\}$，则

A．$\complement_U B \subseteq \complement_U A$　　B．$\complement_U A$ 的子集个数为8

C．$\complement_U (A\cup B)=\{5\}$　　D．$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\{2,3,5\}$

10．已知函数 $f(x)=\frac{2}{|x|-1}$，则关于函数 $f(x)$ 的说法正确的是

A．定义域为 $\{x\mid x\neq 1 且 x\neq -1\}$　　B．关于点 $(0,0)$ 对称

C．在区间 $(1,+\infty)$ 上为增函数　　D．值域为 $(-\infty,-2]\cup(0,+\infty)$

11．已知函数 $f(x)=\log_a(x+a)$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$，若 $\exists x_1$，$x_2\in[1,3]$，使 $|f(x_1)-f(x_2)|=1$ 成立，则实数 a 的值可以是

A．$\sqrt{2}-1$　　B．$\sqrt{2}$

C．$\sqrt{3}$　　D．$\sqrt{2}+1$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12．函数 $f(x)=\dfrac{\lg(x+1)}{x-2}$ 的定义域为______.

13．若第二象限角 α 的终边与单位圆交点的横坐标为 $-\dfrac{1}{2}$，则 $\tan\alpha=$______.

14．已知函数 $f(x)=4^x-2^{x+a}+1$，对任意的 x_1，$x_2\in[1,+\infty)$，若 $f(x_1)=f(x_2)$，恒有 $x_1=x_2$，则实数 a 的取值范围为______.

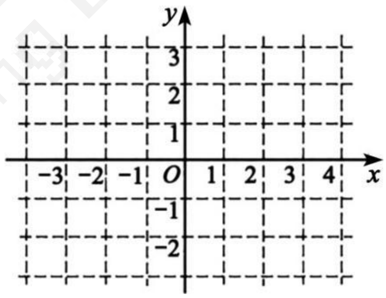
四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15．（13 分）

已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2 x, & x>0,\\ 2^x, & x\leqslant 0.\end{cases}$

（1）在下图平面直角坐标系中画出函数 $f(x)$ 的图象；

（2）解关于 x 的方程 $|f(x)|-\dfrac{1}{2}=0$.



16．（15 分）

（1）若角 α 满足 $0<\alpha<\pi$，且 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$，求 $\sin\alpha\cos\alpha$，$\sin\alpha-\cos\alpha$ 的值；

（2）若集合 $A=\{x\mid a+1<x<3a-2\}$，$B=\{x\mid x^2-3x<0\}$，且 $A\subseteq B$，求实数 a 的取值范围.

17．（15 分）

17 世纪，牛顿发现物体表面的热流密度与物体表面温度和周围环境温度之差成正比，其原理是当一个物体表面的温度高于周围环境的温度时，物体将会通过热传导、对流和辐射等方式向周围环境释放热量．如：一杯热茶水会在常温下逐渐冷却，设茶水的冷却时间为 x（单位：min），茶水冷却 x min 后水温为 y（单位：℃），根据该机理，我们得到函数模型：$y=(y_0-y_S)\mathrm{e}^{-kx}+y_S$，其中 y_0 为茶水的初始温度，y_S 为室温，k 为冷却系数．李大爷在室温 20℃的条件下泡了一杯 95℃的茶水，2 min 后，测得水温为 80℃．

（1）求冷却系数 k；

（2）经研究表明，饮水温度不宜高于 40℃，以保证口腔与食管不受到损害，根据该模型判断 8 min 后该杯茶水是否宜于饮用，并说明理由．

18．（17 分）

已知函数 $f(x)=\ln(2-x)+\ln(2+x)$．

（1）判断函数 $f(x)$ 的奇偶性并证明；

（2）判断函数 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上的单调性并用定义法证明；

（3）若 $\forall x\in(-2,2)$ 都有 $f(kx-1)>0$ 成立，求正实数 k 的取值范围．

19．（17 分）

已知 $A=\{1,2,3,\cdots,k\}(k\geqslant 2，k\in\mathbf{N}^*)$，设 $y=f(x)$ 是 A 到 $\mathbf{N}^*$ 的一个函数，对任意的 $x\in A$，若 $\dfrac{f(2)}{f(1)}$，$\dfrac{f(3)}{f(2)}$，$\cdots$，$\dfrac{f(k)}{f(k-1)}$ 全不相等，则称 $y=f(x)$ 为 $L-$函数．

（1）试判断 $f(x)=2^x(x\in A)$ 与 $g(x)=x^2(x\in A)$ 是否为 $L-$函数（不必写出理由）；

（2）已知 $y=h(x)(x\in A)$ 为 $L-$函数，记 $B=\{y\mid y=h(x)，x\in A\}$ 的元素个数为 $card(B)$．

（i）若 $k=7$，求 $card(B)$ 的最小值；

（ii）若 $k=22$，$card(B)=5$，求 $h(1)+h(2)+\cdots+h(22)$ 的最小值．