

## 2024~2025 学年度上期高中 2023 级期末考试 数学参考答案及评分标准

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8
C	A	B	B	C	A	D	B

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求；全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9	10	11
BC	ABD	ACD

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 90                      13.  $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$                       14. 26

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

解：(1) 众数：75， .....2 分

第 1 至第 6 组的频率分别为 0.1, 0.15, 0.2, 0.3, 0.15, 0.1,

∴ 平均数：

$\bar{x} = 45 \times 0.1 + 55 \times 0.15 + 65 \times 0.2 + 75 \times 0.3 + 85 \times 0.15 + 95 \times 0.1 = 70.5$  ; .....6 分

(2) 根据题意可知，成绩落在 [60,70) 的学生人数为 20 人，成绩落在 [70,80) 的学生人数为 30 人，

∴ 总体平均数： $\bar{w} = \frac{20}{50} \times 62 + \frac{30}{50} \times 77 = 71$ ， .....9 分

总体方差：

$s^2 = \frac{20}{50} [9 + (62 - 71)^2] + \frac{30}{50} [4 + (77 - 71)^2] = \frac{2}{5} \times 90 + \frac{3}{5} \times 40 = 60$  . .....13 分

16. (15 分)

解：(1) ∵ 点 P 在直线  $l: x - y + 1 = 0$  上，且点 P 的横坐标为 2，∴ 点 P 的坐标为 (2,3)，

① 当切线的斜率不存在时，

满足题意，此时，切线的方程为  $x = 2$  ; .....2 分

② 当切线的斜率存在时，

设斜率为  $k$ ，此时切线方程为  $y - 3 = k(x - 2)$ ， .....3 分

即： $kx - y + 3 - 2k = 0$ ，设圆心到切线的距离为  $d$ ，根据题意可得：

$d = \frac{|4k + 3 + 3 - 2k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{|2k + 6|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2$ ， .....4 分

∴  $k^2 + 6k + 9 = k^2 + 1$ ， ∴  $k = -\frac{4}{3}$ ， .....5 分

此时，切线方程为  $y - 3 = -\frac{4}{3}(x - 2)$ ，

化简，得  $4x + 3y - 17 = 0$ ， .....6 分

∴ 切线方程为  $x = 2$  或  $4x + 3y - 17 = 0$  ; .....7 分

(2) ∵  $PA = PB$ ，  $PC$  为公共边， ∴  $\triangle PAC \cong \triangle PBC$ ， .....8 分

∴  $S_{PACB} = 2S_{\triangle PAC} = 2 \times \frac{1}{2} \times |PA| \times |AC| = 2|PA|$ ， .....10 分

又 ∵  $|PA| = \sqrt{|PC|^2 - 4}$ ， ∴ 当  $|PC|$  最小时，  $|PA|$  最小， .....11 分

由题意可知，当  $PC \perp l$  时，  $|PC|$  最小， .....12 分

此时，  $|PC| = \frac{|4 - 1 \times (-3) + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 4\sqrt{2}$ ， .....13 分

∴  $|PA| = \sqrt{|PC|^2 - 4} \geq 2\sqrt{7}$ ， ∴  $S_{PACB} = 2|PA| \geq 4\sqrt{7}$ ，

∴ 四边形  $PACB$  面积的最小值为  $4\sqrt{7}$  . .....15 分

17. (15分)

解: (1) 设事件  $A_i$  = “甲第  $i$  次投篮投进”, 事件  $B_i$  = “乙第  $i$  次投篮投进”, 事件  $C$  = “第三次投篮者为乙”,  
根据题意可知,  $C = (A_1 \overline{A_2}) \cup (\overline{A_1} B_2)$ ,  $A_1 \overline{A_2}$  与  $\overline{A_1} B_2$  互斥, .....3分

$$\therefore P(C) = P((A_1 \overline{A_2}) \cup (\overline{A_1} B_2)) = P(A_1 \overline{A_2}) + P(\overline{A_1} B_2) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{7}{10} = \frac{13}{25}; \quad \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

(2) 设事件  $D$  = “前 4 次投篮中甲投篮次数不少于 3 次”, 根据题意可知:

$$D = (A_1 A_2 A_3) \cup (A_1 A_2 \overline{A_3}) \cup (A_1 \overline{A_2} B_3) \cup (\overline{A_1} \overline{B_2} A_3), \quad \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

事件  $A_1 A_2 A_3$ ,  $A_1 A_2 \overline{A_3}$ ,  $A_1 \overline{A_2} B_3$ ,  $\overline{A_1} \overline{B_2} A_3$  互斥, 且每次投篮的结果相互独立,

$$\begin{aligned} \therefore P(D) &= P((A_1 A_2 A_3) \cup (A_1 A_2 \overline{A_3}) \cup (A_1 \overline{A_2} B_3) \cup (\overline{A_1} \overline{B_2} A_3)) \\ &= P(A_1 A_2 A_3) + P(A_1 A_2 \overline{A_3}) + P(A_1 \overline{A_2} B_3) + P(\overline{A_1} \overline{B_2} A_3) \quad \dots\dots\dots 12 \text{分} \\ &= P(A_1)P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(A_1)P(\overline{A_2})P(B_3) + P(\overline{A_1})P(\overline{B_2})P(A_3) \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{10} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{10} \times \frac{3}{5} \\ &= \frac{63}{125}. \quad \dots\dots\dots 15 \text{分} \end{aligned}$$

18. (17分)

解: (1) 证明: 连接  $CM$ , 在  $\triangle CBM$  中,  $\because BC = BM = 1$ ,  $\angle CBM = \frac{2\pi}{3}$ ,

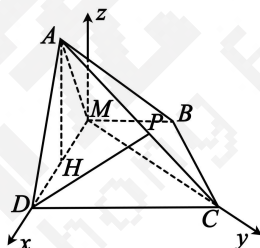
$$\therefore CM = \sqrt{1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \times (-\frac{1}{2})} = \sqrt{3}, \quad \dots\dots\dots 1 \text{分}$$

在  $\triangle CMD$  中,  $\because DM^2 + CM^2 = CD^2$ ,  $\therefore DM \perp CM$ , .....2分

同理可得:  $CM \perp AM$ , .....3分

$$\therefore \begin{cases} CM \perp DM, \\ CM \perp AM, \\ AM \cap DM = M, \\ AM, DM \subset \text{平面 } ADM \end{cases}$$

$\therefore CM \perp$  平面  $ADM$ ; .....5分



(2) 设  $H$  为  $DM$  的中点,  $\therefore AH \perp DM$ ,

$\because CM \perp$  平面  $ADM$ ,  $CM \subset$  平面  $BCDM$ ,

$\therefore$  平面  $ADM \perp$  平面  $BCDM$ ,

又  $\because$  平面  $ADM \cap$  平面  $BCDM = DM$ ,  $AH \subset$  平面  $ADM$ ,

$\therefore AH \perp$  平面  $BCDM$ ,  $\therefore$  以点  $M$  为坐标原点,  $MD$  为  $x$  轴,  $MC$  为  $y$  轴, 过点  $M$  且平行于  $AH$  的直线为  $z$  轴建立如图所示的空间直角坐标系, .....6分

$$\therefore M(0,0,0), D(1,0,0), C(0,\sqrt{3},0), B(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0), H(\frac{1}{2},0,0), A(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}), \quad \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

$$\therefore \overline{AD} = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}), \quad \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

设平面  $ABM$  的法向量为  $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$ ,

$$\therefore \overline{AB} = (-1, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}), \quad \overline{AM} = (-\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}),$$

$$\therefore \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overline{AB} = -x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}z_1 = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overline{AM} = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}z_1 = 0 \end{cases}, \quad \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

取  $x_1 = \sqrt{3}$ ,  $\therefore \mathbf{m} = (\sqrt{3}, 1, -1)$ , .....10分

设直线  $AD$  与平面  $ABM$  所成角为  $\theta$ ,

$$\sin \theta = |\cos \langle \overline{AD}, \mathbf{m} \rangle| = \frac{|\overline{AD} \cdot \mathbf{m}|}{|\overline{AD}| \cdot |\mathbf{m}|} = \frac{|\sqrt{3}|}{1 \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}; \quad \dots\dots\dots 11 \text{分}$$

(其他解法酌情给分)

(3) 设  $\overline{AP} = \lambda \overline{AC}$ ,

$$\therefore \overline{AC} = \left(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$\therefore \overline{AP} = \left(-\frac{\lambda}{2}, \sqrt{3}\lambda, -\frac{\sqrt{3}\lambda}{2}\right), \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

设点  $P$  到平面  $ABM$  的距离为  $d$ ,

$$\therefore d = \frac{|\overline{AP} \cdot \mathbf{m}|}{|\mathbf{m}|} = \frac{|\sqrt{3}\lambda|}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{15}}{15},$$

$$\therefore \lambda = \frac{2}{3},$$

$\therefore P$  是线段  $AC$  上靠近点  $C$  的三等分点,  $\dots\dots\dots 14 \text{ 分}$

易求平面  $BCDM$  的法向量为  $\mathbf{n}_1 = (0, 0, 1)$ ,

设平面  $PDM$  的法向量为  $\mathbf{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ,

$$\therefore \overline{DP} = \overline{DA} + \overline{AP} = \overline{DA} + \frac{2}{3}\overline{AC} = \left(-\frac{5}{6}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6}\right), \quad \overline{MD} = (1, 0, 0),$$

$$\therefore \begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overline{DP} = -\frac{5}{6}x_2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}y_2 + \frac{\sqrt{3}}{6}z_2 = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overline{MD} = x_2 = 0 \end{cases} \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

取  $y_2 = 1$ ,  $\therefore \mathbf{n}_2 = (0, 1, -4)$ ,  $\dots\dots\dots 16 \text{ 分}$

设平面  $PDM$  与平面  $BCDM$  所成的角为  $\alpha$ ,

$$\therefore \cos \alpha = |\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle| = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{4\sqrt{17}}{17}. \dots\dots\dots 17 \text{ 分}$$

19. (17分)

解: (1) 设动圆的半径为  $r$ , 动圆  $C$  与圆  $C_1: (x+1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$  外切,

$$\therefore |CC_1| = r + \frac{1}{2}, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

又  $\because$  动圆  $C$  与圆  $C_2: (x-1)^2 + y^2 = \frac{49}{4}$  内切, 且圆  $C_1$  在圆  $C_2$  内部,

$$\therefore |CC_2| = \frac{7}{2} - r, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\therefore |CC_1| + |CC_2| = 4,$$

又  $\because C_1(-1, 0), C_2(1, 0)$ ,

$$\therefore 2a = 4, 2c = 2, a = 2, c = 1, b = \sqrt{3}, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{动圆圆心 } C \text{ 的轨迹 } \Gamma \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1; \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) ① 设点  $P(4, m), M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ ,

则直线  $MA$  的方程为  $y = \frac{m}{6}(x+2)$ ,

代入椭圆  $\Gamma: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  中,

$$\text{得: } (m^2 + 27)x^2 + 4m^2x + 4m^2 - 108 = 0, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\Delta > 0, \therefore -2x_1 = \frac{4m^2 - 108}{m^2 + 27},$$

$$\therefore x_1 = \frac{54 - 2m^2}{m^2 + 27}, y_1 = \frac{m}{6}(x_1 + 2) = \frac{18m}{m^2 + 27}, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

同理可得:  $x_2 = \frac{2m^2 - 6}{m^2 + 3}, y_2 = \frac{-6m}{m^2 + 3}$ , .....9分

$\therefore k_{MN} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{-6m}{m^2 + 3} - \frac{18m}{m^2 + 27}}{\frac{2m^2 - 6}{m^2 + 3} - \frac{-2m^2 + 54}{m^2 + 27}} = \frac{-6m}{m^2 - 9}$ , .....10分

$\therefore$  直线  $MN$  的方程为  $y + \frac{6m}{m^2 + 3} = -\frac{6m}{m^2 - 9}(x - \frac{2m^2 - 6}{m^2 + 3})$ ,

整理得:  $y = \frac{-6m}{m^2 - 9}(x - 1)$ ,

$\therefore$  直线  $MN$  恒过定点  $Q(1,0)$ ; .....11分

(其他解法酌情给分)

②根据题意, 直线  $MN$  恒过定点  $Q(1,0)$ ,

$\therefore |AQ| = 3, |BQ| = 1$ ,

$\therefore$  点  $A$  到直线  $MN$  的距离为点  $B$  到直线  $MN$  的距离的 3 倍,

$\therefore S_1 = 3S_2$ ,

$\therefore S_2 = \frac{1}{2}|BQ| \cdot |y_1 - y_2| = \frac{1}{2}|y_1 - y_2|$ ,

$\therefore S_1 - S_2 = 2S_2 = |y_1 - y_2|$ , .....12分

设直线  $MN: x = ny + 1$ , 代入椭圆  $\Gamma: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  中,

得:  $(3n^2 + 4)y^2 + 6ny - 9 = 0$ ,

$\Delta > 0, \therefore y_1 + y_2 = \frac{-6n}{3n^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{-9}{3n^2 + 4}$ ,

$\therefore S_1 - S_2 = |y_1 - y_2| = \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \frac{12\sqrt{n^2 + 1}}{3n^2 + 4}$ , .....14分

设  $t = \sqrt{n^2 + 1}, t \geq 1$ ,

$\therefore S_1 - S_2 = \frac{12t}{3t^2 + 1} = \frac{12}{3t + \frac{1}{t}}$ ,

$\therefore f(t) = 3t + \frac{1}{t}$  在  $[1, +\infty)$  上单调递增,

$\therefore f(t) \geq f(1) = 4$ , .....16分

$\therefore S_1 - S_2 = \frac{12}{3t + \frac{1}{t}} \leq \frac{12}{4} = 3$ ,

$\therefore S_1 - S_2$  的最大值为 3. ....17分

解析:

- 解: 点  $A(-2,1,5)$  关于  $x$  轴的对称点的坐标为  $(-2,-1,-5)$ , 故选 C.
- 解:  $\because$  直线  $l$  的方向向量为  $\mathbf{a} = (-1, \sqrt{3})$ ,  $\therefore$  直线  $l$  的斜率  $k = -\sqrt{3}$ ,  $\therefore l: y - 2 = -\sqrt{3}x$ , 整理得:  
 $\sqrt{3}x + y - 2 = 0$ , 故选 A.
- 解: 数据个数共有 10 个, 且为从小到大排列,  $\therefore 10 \times 70\% = 7$ ,  $\therefore$  这组数据的第 70 百分位数为第 7 个数据 56 和第 8 个数据 62 的平均数 59, 故选 B.
- 解:  $\because \|PF_1| - |PF_2|| = 6 = 2a$ ,  $\therefore a = 3$ ,  $\therefore F_1(-5,0)$ ,  $F_2(5,0)$ ,  $\therefore 2c = 10$ ,  $\therefore c = 5$ ,  $\therefore b^2 = c^2 - a^2 = 16$ ,  
 $\therefore$  双曲线的方程为  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ , 故选 B.
- 解: 从 4 个白球, 2 个红球中不放回抽取 2 个球, 共有 15 种情况, 其中抽出 2 球均为白球有 6 种情况,  
 $\therefore P = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ , 故选 C.
- 解: 根据题意知, 圆心到直线的距离  $d = \frac{|b|}{2} \leq 3$ ,  $\therefore -6 \leq b \leq 6$ , 故选 A.
- 解: 设  $\overline{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overline{AD} = \mathbf{b}$ ,  $\overline{AA_1} = \mathbf{c}$ ,  $\therefore \overline{AC_1} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ ,  $\overline{BB_1} = \mathbf{c}$ ,  $\therefore \overline{AC_1} \cdot \overline{BB_1} = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot \mathbf{c} = 6$ , 又  
 $\therefore |\overline{AC_1}| = \sqrt{(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2} = \sqrt{10}$ ,  $\therefore \cos \theta = |\cos \langle \overline{AC_1}, \overline{BB_1} \rangle| = \frac{6}{2 \times \sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ , 故选 D.
- 解: 设  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $\therefore x_1^2 - \frac{y_1^2}{2} = 1$ ,  $x_2^2 - \frac{y_2^2}{2} = 1$ , 两式相减, 得  
 $(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0$ ,  $\therefore \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = 2$ ,  $\therefore k_{AB} \cdot k_{OM} = 2$ ,  $\therefore k_{OM} = 1$ ,  
 $\therefore k_{AB} = 2$ ,  $\therefore$  直线  $AB$  的方程为:  $2x - y - 2 = 0$ , 代入双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$  中, 得  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 3$ ,  
 $\therefore |AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = 2\sqrt{5}$ , 故选 B.
- 解: A 选项:  $\because \overline{AB} = (1, 1, -2)$ ,  $\overline{BC} = (2, 2, 4)$ ,  $\therefore \overline{AB} \cdot \overline{BC} = -4$ , 故 A 错误;  
 B 选项: 取  $\mathbf{a} = \overline{AB} = (1, 1, -2)$ ,  $\because \overline{BC} = (2, 2, 4)$ ,  $\therefore |\overline{BC}| = 2\sqrt{6}$ ,  $\therefore \mathbf{u} = \frac{\overline{BC}}{|\overline{BC}|} = (\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3})$ ,  $\therefore$  点  
 $A$  到直线  $BC$  的距离  $d = \sqrt{a^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ , 故 B 正确;  
 C 选项:  $\because \overline{AB} = (1, 1, -2)$ ,  $\therefore |AB| = \sqrt{6}$ , 故 C 正确;  
 D 选项: 易求平面  $OBC$  的法向量  $\mathbf{n} = (2, -3, \frac{1}{2})$ ,  $\therefore \sin \theta = |\cos \langle \mathbf{n}, \overline{OA} \rangle| = \frac{2}{\sqrt{4+9+\frac{1}{4}}} = \frac{4\sqrt{53}}{53}$ , 故 D  
 错误; 故选 BC.
- 解: A 选项:  $\because$  事件  $A$  与事件  $B$  互斥,  $\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{14}{15}$ , 故 A 正确;  
 B 选项:  $\because$  事件  $A$  与事件  $B$  相互独立,  $\therefore P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{5}$ ,  
 $\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{11}{15}$ , 故 B 正确;  
 C 选项:  $\because$  若事件  $B$  发生时事件  $A$  一定发生,  $\therefore B \subseteq A$ ,  $\therefore P(AB) = P(B) = \frac{1}{3}$ , 故 C 错误;  
 D 选项:  $\because P(A) = \frac{3}{5}$ ,  $P(\overline{B}) = \frac{2}{3}$ ,  $P(A\overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B})$ ,  $\therefore$  事件  $A$  与事件  $\overline{B}$  相互独立,  $\therefore$  事件  $A$   
 与事件  $B$  相互独立, 故 D 正确; 故选 ABD.

11. 解: A 选项:  $\because \triangle F_1PF_2$  为焦点三角形,  $\therefore S_{\triangle F_1PF_2} = b_1^2 \tan \frac{\pi}{6} = \frac{b_2^2}{\tan \frac{\pi}{6}}$ ,  $\therefore b_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}b_1$ , 故 A 正确;

B 选项: 根据椭圆和双曲线的定义, 可得  $|PF_1| + |PF_2| = 2a_1$ ,  $|PF_1| - |PF_2| = 2a_2$ ,  $\therefore |PF_1| = a_1 + a_2$ ,  
 $|PF_2| = a_1 - a_2$ , 在  $\triangle F_1PF_2$  中, 由余弦定理, 可得:

$$|F_1F_2|^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1||PF_2|\cos \frac{\pi}{3},$$

$$\therefore 4c^2 = (a_1 + a_2)^2 + (a_1 - a_2)^2 - 2(a_1 + a_2)(a_1 - a_2) \times \frac{1}{2}, \text{ 整理得 } 4c^2 = a_1^2 + 3a_2^2,$$

$$\therefore 4 = \frac{1}{e_1^2} + \frac{3}{e_2^2}, \text{ 当 } e_2 = \sqrt{3} \text{ 时, } e_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 故 B 错误;}$$

C 选项:  $\because 4 = \frac{1}{e_1^2} + \frac{3}{e_2^2} \geq 2\sqrt{\frac{1}{e_1^2} \times \frac{3}{e_2^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{e_1e_2}$ ,  $\therefore e_1e_2 \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 故 C 正确;

D 选项:  $\because 4 = \frac{1}{e_1^2} + \frac{3}{e_2^2}$ , 故取  $\frac{1}{e_1} = 2\cos\theta$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{e_2} = 2\sin\theta$ ,

$$\therefore \frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2} = 2\cos\theta + \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\theta = \frac{4\sqrt{3}}{3}\sin(\theta + \varphi) \leq \frac{4\sqrt{3}}{3}, \text{ 故 D 正确; 故选 ACD.}$$

12. 解:  $\because x_1, x_2, \dots, x_8$  的平均数  $\bar{x} = 11$ ,  $\therefore 8x_1 + 2, 8x_2 + 2, \dots, 8x_8 + 2$  的平均数  $\bar{x}' = 8 \times 11 + 2 = 90$ .

13. 解: 设圆的方程为  $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ , 代入三点  $A(0,0)$ ,  $B(6,8)$ ,  $C(3,-1)$ , 有

$$\begin{cases} F = 0, \\ 100 + 6D + 8E + F = 0, \therefore D = -6, E = -8, F = 0, \therefore \text{圆的标准方程为 } (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25. \\ 10 + 3D - E + F = 0 \end{cases}$$

14. 解:  $\because$  离心率  $e = \frac{1}{2}$ ,  $\therefore a = 2c$ ,  $b = \sqrt{3}c$ ,  $\triangle BF_1F_2$  为等边三角形, 设  $M(x_1, y_1)$ ,  $N(x_2, y_2)$ , 直线  $MN$

的方程为  $x = \sqrt{3}y - c$ , 代入  $\frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1$  中, 得  $13y^2 - 6\sqrt{3}cy - 9c^2 = 0$ ,  $\therefore y_1 + y_2 = \frac{6\sqrt{3}c}{13}$ ,

$$y_1y_2 = -\frac{9c^2}{13}, \therefore |MN| = \sqrt{1+3} \times \sqrt{(y_1+y_2)^2 - 4y_1y_2} = \frac{48c}{13} = 12, \therefore c = \frac{13}{4},$$

$$\therefore \text{周长 } C = |BM| + |BN| + |MN| = |NF_2| + |MF_2| + |MN| = 4a = 8c = 26.$$