2025 届高三部分重点中学 12 月联合测评

数学试题参考答案及多维细目表

题号	1	2	3	4	5	6
答案	C	D	B	D	C	A
题号	7	8	9	10	11	
答案	A	B	AD	ABC	BCD	

1.【答案】C

【解析】∵$A=\{x\mid \ln(x-1)\leqslant 0\}=\{x\mid 1<x\leqslant 2\}$，$B=\{x\mid 0\leqslant 2x-1\leqslant 2\}=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\right\}$，∴$A\cup B=\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2\right\}$.

2.【答案】D

【解析】由 $z=\frac{4+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ 可得 $z=\frac{(4+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{3+5\mathrm{i}}{2}$，$\bar{z}=\frac{3-5\mathrm{i}}{2}$，故对应的点为$\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right)$，位于第四象限.

3.【答案】B

【解析】∵$\sum\limits_{i=1}^{8}x_i=\frac{9}{8}\times 8=9$，∴增加两个样本点后 x 的平均数为$\frac{9-1+2}{10}=1$；∵$\hat{y}=2\times\frac{9}{8}-\frac{1}{4}=2$，∴$\sum\limits_{i=1}^{8}y_i=2\times 8=16$，∴增加两个样本点后 y 的平均数为$\frac{16+5+9}{10}=3$，∴$3=3\times 1+\hat{b}$，解得 $\hat{b}=0$，∴新的经验回归方程为 $\hat{y}=3x$，则当 $x=4$ 时，$\hat{y}=12$，∴样本点$(4,10)$的残差为 $10-12=-2$.

4.【答案】D

【解析】∵$2\,023^{2\,025}=(2\,024-1)^{2\,025}=\mathrm{C}_{2\,025}^{0}2\,024^{2\,025}-\mathrm{C}_{2\,025}^{1}2\,024^{2\,024}+\cdots+\mathrm{C}_{2\,025}^{2\,024}2\,024-\mathrm{C}_{2\,025}^{2\,025}=2\,024(\mathrm{C}_{2\,025}^{0}2\,024^{2\,024}-\mathrm{C}_{2\,025}^{1}2\,024^{2\,023}+\cdots+\mathrm{C}_{2\,025}^{2\,024}-1)+2\,024-\mathrm{C}_{2\,025}^{2\,025}$，∴$b=2\,024-\mathrm{C}_{2\,025}^{2\,025}=2\,023$.

5.【答案】C

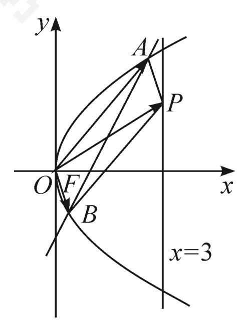
【解析】∵$\cos\theta=1$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$，∴$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向，但当$|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|<0$ 时显然不满足$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$，因此充分性不成立.∵$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$，∴$(|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|)^2=(|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|)^2$，即$|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|$，从而 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向，$\cos\theta=1$，由此可知必要性成立.

6.【答案】A

【解析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，$q\neq 0$，依题意，$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}=14$，$a_2=\frac{1}{4}$，即$\frac{1}{\frac{a_2}{q}}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2q}=\frac{q}{a_2}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}\cdot\frac{1}{q}=14$，∴$2q+2+\frac{2}{q}=7$，$2q^2-5q+2=0$，解得 $q=2$ 或 $q=\frac{1}{2}$，∴$a_1=\frac{1}{8}$，$a_2=\frac{1}{4}$，$a_3=\frac{1}{2}$或 $a_1=\frac{1}{2}$，$a_2=\frac{1}{4}$，$a_3=\frac{1}{8}$，∴$S_3=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{7}{8}$.

7.【答案】A

【解析】由题知 $F(1,0)$，直线 l 的斜率不为 0，设直线 l 的方程为 $x=my+1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，



联立$\begin{cases}x=my+1,\\y^2=4x,\end{cases}$整理得 $y^2-4my-4=0$，则 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$.

∴$x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2=4m^2+2$.

∵$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$，∴四边形 $OAPB$ 为平行四边形.

∵点 P 的横坐标为 3，∴$3=x_1+x_2=4m^2+2$，解得 $m^2=\frac{1}{4}$.

∴$|AB|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{16m^2-4\times(-4)}=5$.

点 O 到直线 AB 的距离为$\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，∴平

行四边形 $OAPB$ 的面积为 $5\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{5}$.

8.【答案】B

【解析】如图,取 AB 中点 M,连接 PM,CM.

由题可知 $AB\perp PM$,$AB\perp CM$.

$\because PM\cap CM=M$,$PM\subset$平面 PMC,$CM\subset$平面 PMC,$\therefore AB\perp$平面 PMC.

作 $PH\perp MC$,垂足为 H. $\because PH\subset$平面 PMC,$\therefore AB\perp PH$.

又 $CM\cap AB=M$,$CM\subset$平面 ABC,$AB\subset$平面 ABC,$\therefore PH\perp$平面 ABC.

过点 H 作 $HN\perp BC$,垂足为 N,连接 PN,易知 $BC\perp PN$.

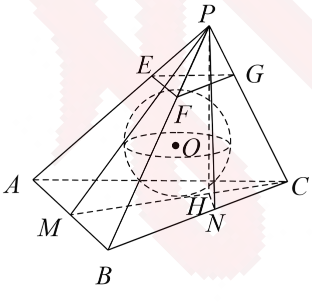
设小球半径为 r,$\therefore\frac{PH}{2r}=\frac{PB}{FB}=\frac{3}{2}$,$\therefore PH=3r$.

根据题意,$V_{三棱锥P\text{-}ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot PH=\frac{1}{3}(S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PAC}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle ABC})\cdot r$,

$\because S_{\triangle PAB}=S_{\triangle ABC}=2$,$S_{\triangle PAC}=S_{\triangle PBC}$,$\therefore 6=4+2S_{\triangle PAC}$,$\therefore S_{\triangle PAC}=S_{\triangle PBC}=1$.

由 $\frac{1}{2}BC\cdot PN=1$,得 $PN=1$,$\therefore\sin\angle PBC=\frac{PN}{PB}=\frac{1}{2}$,$\therefore\cos\angle PBN=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore PC=\sqrt{PB^2+CB^2-2PB\cdot CB\cos\angle PBC}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$.



9.【答案】AD

【解析】对于选项 A,当 $x>0$ 时,$\frac{2x}{x^2+1}=\frac{2}{x+\frac{1}{x}}$.

$\because x+\frac{1}{x}\geqslant 2$,当且仅当 $x=1$ 时,取等号,$\therefore\frac{2x}{x^2+1}=\frac{2}{x+\frac{1}{x}}\leqslant 1$,故正确.

对于选项 B,$\because x>y>0$ 且 $z>0$,由糖水原理可知 $\frac{y+z}{x+z}>\frac{y}{x}$,故错误;

对于选项 C,当 $x<0<y$ 时,结论不成立,故错误;

对于选项 D,$\left(x+\frac{1}{y}\right)-\left(y+\frac{1}{x}\right)=\frac{xy+1}{y}-\frac{xy+1}{x}=(xy+1)\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)>0$,即 $x+\frac{1}{y}>y+\frac{1}{x}$,故正确.

10.【答案】ABC

【解析】由图可知 $A=2$,$\begin{cases}0+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{6},\\ \frac{5\omega\pi}{12}+\varphi=2k\pi+\pi,\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$,解得 $\omega=2$,$\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{6}$,$k\in\mathbf{Z}$,

$\therefore f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

对于选项 A,当 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$时,$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,$\therefore f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$上单调递增,故正确;

对于选项 B,$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\frac{3\pi}{2}=-2$ 为其最小值,$\therefore x=\frac{2\pi}{3}$为 $f(x)$图象的一条对称轴,故正确;

对于选项 C,$f\left(\frac{11\pi}{12}\right)=2\sin\left(\frac{11\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin 2\pi=0$,$\therefore$点$\left(\frac{11\pi}{12},0\right)$为 $f(x)$图象的一个对称中心,故正确;

对于选项 D,当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$时,$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$,当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$即 $x=0$ 时,$f(x)_{\min}=1$,当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$即 $x=\frac{\pi}{6}$时,$f(x)_{\max}=2$,即 $f(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上的值域为$[1,2]$,故错误.

11.【答案】BCD

【解析】对于选项 A,沿 $C_1\to B_1\to A_1\to A\to B\to C\to C_1$ 等路线即可,故错误;

对于选项 B,若存在重复路线,两次移动回到点 C_1 可以第一次移动到达点 A_1,B_1,C,第三次移动再从这些移动方式中选,共有 9 种走法,另外可以先移动两次再原路返回,第一次移动可能到达点 A_1,B_1,C,每个点在第二次移动时都有两种移动方式,故有 6 种方式;

若不存在重复路线,经过点 C 由四条棱组成的闭合回路只有 $C_1A_1ACC_1$ 和 $C_1B_1BCC_1$ 两种,每条路都有两种经过方式,共有 4 种方式,∴概率为 $\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot 19=\frac{19}{81}$,故正确;

对于选项 C,列举法:$C_1\to A_1\to A\to B\to B_1\to C_1$,$C_1\to A_1\to A\to B\to C\to C_1$,$C_1\to A_1\to B_1\to B\to C\to C_1$,$C_1\to B_1\to A_1\to A\to C\to C_1$,$C_1\to C\to A\to B\to B_1\to C_1$,故共有 5 条不同笔记,故正确;

对于选项 D,先考虑重复路线:

前两条路线重复,第一次移动到达点 A_1,B_1,C 共 3 条路径;后两条路径重复(即第一次移动到点 A_1)同理有 3 条路径,其中 $C_1\to A_1\to C_1\to A_1$ 重复,故共只有 5 条路径;

再考虑不重复路径:只有 $C_1\to C\to A\to A_1$,1 条路径,∴三次移动后到达点 A 有 6 条路径.记事件 A_1:从点 C_1 出发,三次移动后到达点 A_1;事件 C:从点 C_1 出发,三次移动时经过点 C,故 $P(A_1)=\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot 6$,$P(A_1C)=\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot 2$,

故 $P(C|A_1)=\frac{P(A_1C)}{P(A_1)}=\frac{1}{3}$,故正确.(也可以直接列举路径来判断)

12.【答案】8

【解析】根据点 F 到其中一条渐近线的距离为 2,可得 $b=2$,且满足 $\alpha+\beta=\pi$.又 $\alpha=\frac{1}{5}\beta$,∴$\beta=\frac{\pi}{6}$,∴$\frac{b}{a}=\tan\beta=\frac{\sqrt{3}}{3}$,故 $a=2\sqrt{3}$,∴$c=4$,∴焦距为 $2c=8$.

13.【答案】45

【解析】由正态分布的性质得质量指标在区间 $(96,100)$ 的概率为 $1-2\times0.05=0.9$,

即 1 件产品的质量指标位于区间 $(96,100)$ 的概率为 0.9,∴$Y\sim B(500,0.9)$,故 $D(Y)=500\times0.9\times0.1=45$.

14.【答案】$[e^{-e},1)$

【解析】$f(x)=a^{x-1}-\log_a(x-1)=\frac{a^x}{a}-\frac{\ln(x-1)}{\ln a}=\frac{1}{a\ln a}[a^x\ln a-a\ln(x-1)]$,

记 $h(x)=a^x\ln a-a\ln(x-1)$,$f(x)$ 在定义域上单调,可得 $h(x)$ 必为单调函数.

若 $h(x)$ 单调递增,则 $h'(x)=a^x(\ln a)^2-\frac{a}{x-1}\geqslant0$ 恒成立,即 $(x-1)a^{x-1}\geqslant\frac{1}{(\ln a)^2}$,

∴$ta^t\geqslant\frac{1}{(\ln a)^2}$.又函数 $G(t)=ta^t$ 在 $t\to0$ 时值趋近于 0,不满足.

若 $h(x)$ 单调递减,则 $h'(x)=a^x(\ln a)^2-\frac{a}{x-1}\leqslant0$ 恒成立,即 $(x-1)a^{x-1}\leqslant\frac{1}{(\ln a)^2}$,即 $ta^t\leqslant\frac{1}{(\ln a)^2}$,

∴$(ta^t)_{\max}\leqslant\frac{1}{(\ln a)^2}$,设 $G(t)=ta^t$,$G'(t)=(1+t\ln a)a^t=0$,则 $t=-\frac{1}{\ln a}$,

当 $a>1$ 时,$t<0$ 不成立;

当 $0<a<1$ 时,$t=-\frac{1}{\ln a}>0$,∴$G(t)$ 在区间 $\left(0,-\frac{1}{\ln a}\right)$ 上单调递增,在区间 $\left(-\frac{1}{\ln a},+\infty\right)$ 上单调递减,

∴$-\frac{1}{\ln a}\cdot a^{-\frac{1}{\ln a}}\leqslant\frac{1}{(\ln a)^2}$,即 $a^{-\frac{1}{\ln a}}\leqslant-\frac{1}{\ln a}$,

∴$\left(-\frac{1}{\ln a}\right)\ln a\leqslant\ln\left(-\frac{1}{\ln a}\right)$,即 $-1\leqslant\ln\left(-\frac{1}{\ln a}\right)$,解得 $e^{-e}\leqslant a<1$.

15.解:(1)由二倍角公式得 $\frac{\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}=$

$\dfrac{\left(\sin\dfrac{B}{2}+\cos\dfrac{B}{2}\right)^2}{\cos^2\dfrac{B}{2}-\sin^2\dfrac{B}{2}}$, ………………………… 2 分

$\therefore \dfrac{\sin\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{A}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}-\sin\dfrac{A}{2}}=\dfrac{\sin\dfrac{B}{2}+\cos\dfrac{B}{2}}{\cos\dfrac{B}{2}-\sin\dfrac{B}{2}}$,

整理得 $\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}-\cos\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}=0$,

即 $\sin\left(\dfrac{A}{2}-\dfrac{B}{2}\right)=0$. ………………………… 5 分

$\because A,B\in(0,\pi)$, $\therefore \dfrac{A}{2}-\dfrac{B}{2}=0$,即 $A=B$,即 $\triangle ABC$ 为等腰三角形. ………………………… 6 分

(其他方法酌情给分)

(2)由(1)及题设,有 $AC=BC=2CD$,

$$\therefore \cos\angle CAD=\frac{AC^2+AD^2-CD^2}{2AC\cdot AD}$$

$$=\frac{AC^2+AD^2-\frac{AC^2}{4}}{2AC\cdot AD}$$

$$=\frac{\frac{3AC^2}{4}+AD^2}{2AC\cdot AD}$$

$$=\frac{3AC}{8AD}+\frac{AD}{2AC}$$

$$\geqslant 2\sqrt{\frac{3AC}{8AD}\cdot\frac{AD}{2AC}}$$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ………………………… 10 分

$\therefore \angle CAD\leqslant\dfrac{\pi}{6}$,当且仅当 $\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时,等号成立.

即 $\angle CAD$ 的最大值为 $\dfrac{\pi}{6}$,此时由 $\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 可得 $\triangle ACD$ 为直角三角形, $\angle ACD=\dfrac{\pi}{3}$. … 12 分

又由(1)可得 $\triangle ABC$ 为正三角形, $\therefore \triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\sqrt{3}$. ………………………… 13 分

16. 解:(1)在 Rt $\triangle ABC$ 和 Rt $\triangle ABD$ 中,

$\tan\angle BAC=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{1}{2}$, $\tan\angle ABD=\dfrac{AD}{AB}=2$,

$\therefore \angle BAC$ 与 $\angle ABD$ 互余,即 $AC\perp BD$. ……
…………………………………………… 4 分

又 $PA\perp$ 平面 $ABCD$, $BD\subset$ 平面 $ABCD$,

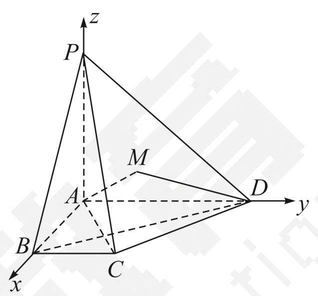
$\therefore PA\perp BD$.

又 $AC,PA\subset$ 平面 PAC, $AC\cap PA=A$,

$\therefore BD\perp$ 平面 PAC.

又 $BD\subset$ 平面 PBD, $\therefore$ 平面 $PAC\perp$ 平面 PBD.
…………………………………………… 7 分

(2) $\because AB,AD,AP$ 两两互相垂直, $\therefore$ 分别以 AB,AD,AP 为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系.



不妨设 $BC=1$,则 $A(0,0,0)$, $C(2,1,0)$, $D(0,4,0)$, $P(0,0,4)$,

$\therefore \overrightarrow{PC}=(2,1,-4)$, $\overrightarrow{PD}=(0,4,-4)$.

$\because$ 点 M 在平面 PCD 内,

$\therefore$ 设 $\overrightarrow{PM}=x\overrightarrow{PC}+y\overrightarrow{PD}$,

则 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AP}+x\overrightarrow{PC}+y\overrightarrow{PD}=(0,0,4)+x(2,1,-4)+y(0,4,-4)=(2x,x+4y,4-4x-4y)$, ………………………… 9 分

$\because AM\perp$ 平面 PCD, $\therefore AM\perp PC$, $AM\perp PD$,

$$\therefore\begin{cases}\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{PC}=4x+x+4y-16+16x+16y\\ \qquad=21x+20y-16=0,\\ \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{PD}=4x+16y-16+16x+16y\\ \qquad=20x+32y-16=0,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=\dfrac{12}{17},\\ y=\dfrac{1}{17},\end{cases}$

$\therefore \overrightarrow{AM}=\left(\dfrac{24}{17},\dfrac{16}{17},\dfrac{16}{17}\right)$,即 $M\left(\dfrac{24}{17},\dfrac{16}{17},\dfrac{16}{17}\right)$, …
…………………………………………… 12 分

$\therefore$ 点 M 到平面 PAD 的距离 $d_1=\dfrac{24}{17}$,

点 M 到棱 AD 的距离 $d_2=\sqrt{\left(\dfrac{24}{17}\right)^2+\left(\dfrac{16}{17}\right)^2}=\dfrac{8\sqrt{13}}{17}$,

设二面角 M-AD-P 大小为 θ,则 $\sin\theta=\dfrac{d_1}{d_2}=\dfrac{24}{8\sqrt{13}}=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$,

$\therefore\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$,

即二面角 M-AD-P 的余弦值为$\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$. ……………………………………………… 15 分

17. 解:(1) $f'(x)=\cos x-\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\sin x$,且 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$. …………………………… 2 分

当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时,$\cos x>0$,$\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\sin x<0$,从而 $f'(x)=\cos x-\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\sin x>0$,

即此时函数 $f(x)$ 在区间$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调递增;

……………………………………………… 4 分

当$\dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\pi$ 时,$\cos x<0$,$\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\sin x\geqslant0$,

从而 $f'(x)=\cos x-\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\sin x<0$,

即此时函数 $f(x)$ 在区间$\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$上单调递减.

$\therefore$综上所述,函数 $f(x)$ 在区间$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上单调递增,在区间$\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$上单调递减. ……… 7 分

(2) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1>0$,又 $f(\pi)=-\dfrac{\pi}{2}+1<0$,且函数 $f(x)$ 在区间$\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$上单调递减,

$\therefore$函数 $f(x)$ 在区间$\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$上存在唯一的零点.

……………………………………………… 9 分

当 $x\in\left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ 时,记 $g(x)=f'(x)=\cos x-\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\sin x$,

从而 $g'(x)=-2\sin x-\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\cos x$,

且此时 $\sin x<0$,$\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\cos x<0$,

$\therefore g'(x)>0$,$g(x)=f'(x)$ 在区间$\left[\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right]$上单调递增.

$g(\pi)=-1<0$,$g\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=\pi>0$,$\therefore$存在 $x_0\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$,使得 $g(x_0)=0$, ……………… 11 分

且 $x\in(\pi,x_0)$ 时,$g(x)=f'(x)<0$,即此时 $f(x)$ 在区间(π,x_0)上单调递减;

$x\in\left(x_0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 时,$g(x)=f'(x)>0$,即此时 $f(x)$ 在区间$\left(x_0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$上单调递增. …… 13 分

$\therefore$由 $f(\pi)=-\dfrac{\pi}{2}+1<0$,得 $f(x_0)<0$,

即函数 $f(x)$ 在区间(π,x_0)上无零点;

而由 $f(x_0)<0$,$f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=1>0$,

即函数 $f(x)$ 在区间$\left(x_0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$上有唯一的零点.

$\therefore$函数 $f(x)$ 在区间$\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$上有 2 个零点.

……………………………………………… 15 分

18. 解:(1)由题意知抛物线的焦点 P 到两定点 A,B 的距离之和等于点 A,B 到抛物线的准线的距离之和,等于 AB 的中点 O 到准线的距离的 2 倍,即等于圆 $x^2+y^2=9$ 的半径的 2 倍,

$\therefore|PA|+|PB|=6>|AB|=2$,$\therefore$点 P 在以 A,B 为焦点的椭圆 E 上, ……………… 3 分

设椭圆 E 的标准方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,

则 $2a=6$,$2c=2$,$\therefore a=3$,$c=1$,$\therefore b^2=a^2-c^2=8$,

$\therefore$曲线 E 的标准方程为$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$. …… 8 分

(2)设直线 MN:$x=my+2(m\neq0)$,

由$\begin{cases}x=my+2,\\8x^2+9y^2=72,\end{cases}$

$\therefore(8m^2+9)y^2+32my-40=0$.

设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=\dfrac{-32m}{8m^2+9}$,$y_1y_2=\dfrac{-40}{8m^2+9}$,

CM 的中点坐标为$\left(\frac{x_1-3}{2},\frac{y_1}{2}\right)$，$k_{CM}=\frac{y_1}{x_1+3}$，
…………………………………………… 9 分

CM 的垂直平分线的斜率为$-\frac{x_1+3}{y_1}$. … 10 分

∴CM 的垂直平分线方程为 $y=-\frac{x_1+3}{y_1}\cdot\left(x-\frac{x_1-3}{2}\right)+\frac{y_1}{2}$，即 $y=-\frac{my_1+5}{y_1}x+\frac{x_1^2-9}{2y_1}+\frac{y_1}{2}$，

由$\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{8}=1$ 得$\frac{x_1^2-9}{2y_1}=-\frac{9}{16}y_1$，

∴CM 的垂直平分线方程为 $y=-\frac{my_1+5}{y_1}x-\frac{1}{16}y_1$. …………………………………… 11 分

同理 CN 的垂直平分线方程为 $y=-\frac{my_2+5}{y_2}x-\frac{1}{16}y_2$. ………………………………… 13 分

设点 $Q(x_0,y_0)$，

则 y_1,y_2 是方程 $y_0=-\frac{my+5}{y}x_0-\frac{1}{16}y$，

即 $y^2+(16mx_0+16y_0)y+80x_0=0$ 的两根，

∴$\begin{cases}y_1+y_2=-16mx_0-16y_0=\frac{-32m}{8m^2+9},\\ y_1y_2=80x_0=\frac{-40}{8m^2+9},\end{cases}$ 两式

相除得$\frac{-mx_0-y_0}{5x_0}=\frac{4m}{5}$，∴$\frac{y_0}{x_0}=-5m$. ……
…………………………………………… 16 分

∴$k_{OQ}\cdot k_{MN}=-5m\cdot\frac{1}{m}=-5$，

即直线 OQ 与 MN 的斜率之积为定值-5. …
…………………………………………… 17 分

(其他方法酌情给分)

19. 解：(1)对数列 S_0 依次做 A_3,A_4,A_5 变换即可.
…………………………………………… 4 分

(2)首先，若对数列 $S_0:a_1,a_2,a_3,a_4,a_5$ 依次做 $A_{i+1},A_{i+2},\cdots,A_5(i\in\{1,2,3,4\})$变换，得到的数列 a_i 加 1，a_{i+1}减 1，其余项不变；

若对数列中 $S_0:a_1,a_2,a_3,a_4,a_5$ 依次做 $A_i,A_{i-1},\cdots,A_1(i\in\{1,2,3,4\})$变换，得到的数列中 a_i 减 1，a_{i+1}加 1，其余项不变. ……… 7 分

∴可以通过若干次变换使得相邻两数一个加 1，另一个减 1，

∴可以通过若干次变换使得第一项变为 0，第二项变为 a_1+a_2.

同样的可以通过若干次变换分别使得 a_2,a_3,a_4 均变为 0，此时即为 0，0，0，0，0. …… 10 分

(3)记此时的变换①为 B_1，变换③为 B_{10}.

首先，记 $T_1=a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$，$T_2=a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}$，

每次变换使得 T_1 的值加 2 或减 2 或不变，故可以经过若干次变换使得 $T_1=0$，此时 $T_2=0$；

其次，对任意数列 $S_0:a_1,a_2,\cdots,a_{10}$ 依次做 A_{j-1},A_j,A_j,A_{j+1}变换，其中 $j\in\{3,4,\cdots,8\}$，得到的数列中 a_j 减 2，a_{j-2},a_{j+2}均加 1，其余项不变，记此变换为 B_j，

依次做 A_8,A_9,A_{10} 变换，得到的数列中 a_9 减 1，a_7 加 1，其余项不变，记此变换为 B_9，

此时 B_1,B_3,B_5,B_7,B_9 只变换 a_1,a_3,a_5,a_7,a_9，且对 a_1,a_3,a_5,a_7,a_9 规则同第(2)问，且 $T_1=0$，…………………………………… 15 分

∴由(2)知可以对 S_0 做若干次变换，得到的数列中 $a_1=a_3=a_5=a_7=a_9=0$.

同理可以再对 S_0 做若干次变换，得到的数列中 $a_2=a_4=a_6=a_8=a_{10}=0$，则此时得到数列 $\underbrace{0,0,\cdots,0}_{10个}$. ………………………………… 17 分

(其他方法酌情给分)

多维细目表

题型	题号	分值	必备知识	学科素养						预估难度		
				数学抽象	逻辑推理	数学建模	直观想象	数学运算	数据分析	易	中	难
选择题	1	5	集合与简易逻辑						√	√		
选择题	2	5	复数					√		√		
选择题	3	5	统计与概率		√					√		
选择题	4	5	二项式定理		√			√		√		
选择题	5	5	平面向量		√		√			√		
选择题	6	5	等比数列		√			√		√		
选择题	7	5	抛物线方程及其性质			√					√	
选择题	8	5	立体几何		√		√					√
选择题	9	6	不等式的性质		√				√	√		
选择题	10	6	三角函数的图象及其性质			√					√	
选择题	11	6	排列组合与概率	√		√						√
填空题	12	5	双曲线方程及其性质				√	√		√		
填空题	13	5	概率分布	√		√					√	
填空题	14	5	导数及其应用		√				√			√
解答题	15	13	解三角形		√		√			√		
解答题	16	15	立体几何				√	√		√		
解答题	17	15	导数及其应用		√			√	√		√	
解答题	18	17	椭圆方程及其性质				√	√			√	
解答题	19	17	数列与新定义综合	√	√	√						√