2025 届高三部分重点中学 12 月联合测评

数学试题

命题学校:武汉外国语学校

命、审题人:邓海波　肖计雄　夏贤聪

考试时间:2024 年 12 月 12 日 15:00—17:00　　试卷满分:150 分　　考试用时:120 分钟

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 设集合 $A=\{x\mid \ln(x-1)\leqslant 0\}$,$B=\{x\mid 0\leqslant 2x-1\leqslant 2\}$,则 $A\cup B=$

A. $\left\{x\,\middle|\,1<x\leqslant\frac{3}{2}\right\}$　　B. $\{x\mid x\leqslant 2\}$

C. $\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2\right\}$　　D. $\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\right\}$

2. 已知复数 z 满足 $(1-\mathrm{i})z=4+\mathrm{i}$,则 z 的共轭复数在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 已知变量 x 和变量 y 的一组成对样本数据为 $(x_i,y_i)(i=1,2,3,\cdots,8)$,其中 $\overline{x}=\frac{9}{8}$,其回归直线方程为 $\hat{y}=2x-\frac{1}{4}$,当增加两个样本数据 $(-1,5)$ 和 $(2,9)$ 后,重新得到的回归直线方程斜率为 3,则在新的回归直线方程的估计下,样本数据 $(4,10)$ 所对应的残差为

A. -3　　B. -2　　C. -1　　D. 1

4. 若正整数 a,b 满足等式 $2\,023^{2\,025}=2\,024a+b$,且 $b<2\,024$,则 $b=$

A. 1　　B. 2　　C. 2 022　　D. 2 023

5. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为非零向量,其夹角为 θ,则“$\cos\theta=1$”是“$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$”的

A. 充要条件　　B. 充分不必要条件

C. 必要不充分条件　　D. 既不充分也不必要条件

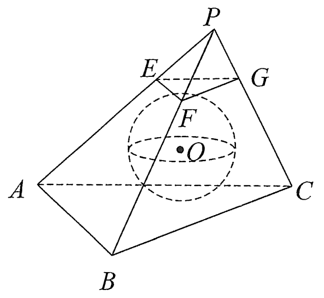
6. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}=14$,$a_2=\frac{1}{4}$,记 S_n 为其前 n 项和,则 $S_3=$

A. $\frac{7}{8}$　　B. $\frac{7}{4}$　　C. $\frac{7}{2}$　　D. 7

7. 已知直线 l 经过抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点,且与抛物线交于 A,B 两点,若使得 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 成立的点 P 的横坐标为 3,则四边形 $OAPB$ 的面积为

A. $2\sqrt{5}$　　B. $3\sqrt{5}$　　C. $4\sqrt{5}$　　D. $5\sqrt{5}$

8. 如图,在三棱锥 $P\text{-}ABC$ 中,$PA=PB=CA=CB=2$,$\angle APB=\angle ACB=\frac{\pi}{2}$,$E,F,G$ 分别为 PA,PB,PC 上靠近点 P 的三等分点,若此时恰好存在一个小球与三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的四个面均相切,且小球同时还与平面 EFG 相切,则 $PC=$



A. $\sqrt{6}+\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{6}-\sqrt{2}$

C. $\sqrt{13}+1$　　D. $\sqrt{13}-1$

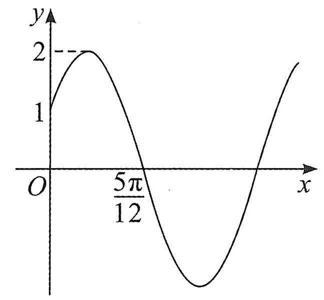
二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分.在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求.全部选对的得 6 分,部分选对的得部分分,有选错的得 0 分.

9. 下列结论正确的是

A. 若 $x>0$,则 $\frac{2x}{x^2+1}\leqslant 1$　　B. 若 $x>y>0$,$z>0$,则 $\frac{y}{x}>\frac{y+z}{x+z}$

C. 若 $xy\neq 0$ 且 $x<y$,则 $\frac{1}{x}>\frac{1}{y}$　　D. 若 $x>y>0$,则 $x+\frac{1}{y}>y+\frac{1}{x}$

10. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,0<\varphi<2\pi)$ 的部分图象如图所示,则



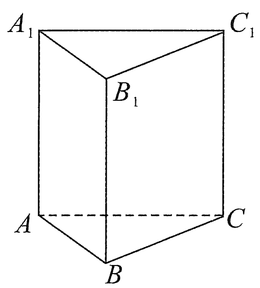
A. $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增

B. $f(x)$ 图象的一条对称轴方程为 $x=\frac{2\pi}{3}$

C. $f(x)$ 图象的一个对称中心为点 $\left(\frac{11\pi}{12},0\right)$

D. $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上的值域为 $[1,\sqrt{3}]$

11. 甲同学想用一支铅笔从如下的直三棱柱的顶点 C_1 出发沿三棱柱的棱逐步完成“一笔画”,即每一步均沿着某一条棱从一个端点到达另一个端点,紧接着从上一步的终点出发随机选择下一条棱再次画出,进而达到该棱的另一端点,按此规律一直进行,其中每经过一条棱称为一次移动,并随机选择某个顶点处停止得到一条“一笔画”路径,比如“一笔画”路径 $C_1\to B_1\to A_1\to A\to C$.若某“一笔画”路径中没有重复经过任何一条棱,则称该路径为完美路径,否则为不完美路径.下列说法正确的有



A. 若“一笔画”路径为完美路径,则甲不可能 6 次移动后回到点 C_1

B. 经过 4 次移动后仍在点 C_1 的概率为 $\frac{19}{81}$

C. 若“一笔画”路径为完美路径,则 5 次移动后回到点 C_1 有 5 条不同笔迹

D. 经过 3 次移动后,到达点 A_1 的条件下经过点 C 的概率为 $\frac{1}{3}$

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12. 设 F 为双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点,α,β 分别为双曲线 C 的两条渐近线的倾斜角,已知点 F 到其中一条渐近线的距离为 2,且满足 $\alpha=\dfrac{1}{5}\beta$,则双曲线 C 的焦距为________.

13. 某流水线上生产的一批零件,其规格指标 X 可以看作一个随机变量,且 $X\sim N(98,\sigma^2)$,对于 $X\geqslant 100$ 的零件即为不合格,不合格零件出现的概率为 0.05,现从这批零件中随机抽取 500 个,用 Y 表示这 500 个零件的规格指标 X 位于区间 $(96,100)$ 的个数,则随机变量 Y 的方差是________.

14. 已知函数 $f(x)=a^{x-1}-\log_a(x-1)$(其中 $a>0$,且 $a\neq 1$)为其定义域上的单调函数,则实数 a 的取值范围为________.

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.(本小题满分 13 分)

在$\triangle ABC$ 中,内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c,且 $\dfrac{1+\sin A}{\cos A}=\dfrac{1+\sin B}{\cos B}$.

(1)判断$\triangle ABC$ 的形状;

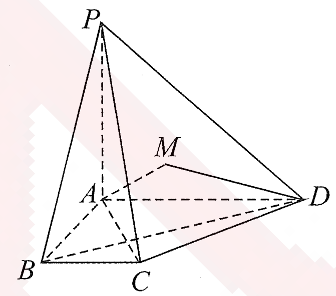
(2)设 $AB=2$,且 D 是边 BC 的中点,求当$\angle CAD$ 最大时$\triangle ABC$ 的面积.

16.(本小题满分 15 分)

在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为直角梯形,$AD\parallel BC$,$AB\perp AD$,$PA\perp$平面$ABCD$,$AP=AD=2AB=4BC$.

(1)求证:平面 $PAC\perp$平面 PBD;

(2)$AM\perp$平面 PCD 于点 M,求二面角 $M\text{-}AD\text{-}P$ 的余弦值.



17.(本小题满分 15 分)

设函数 $f(x)=\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\cos x+1$.

(1)讨论函数 $f(x)$在区间$[0,\pi]$上的单调性;

(2)判断并证明函数 $y=f(x)$在区间$\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$上零点的个数.

18.(本小题满分 17 分)

已知过 $A(-1,0)$,$B(1,0)$两点的动抛物线的准线始终与圆 $x^2+y^2=9$ 相切,该抛物线焦点 P 的轨迹是某圆锥曲线 E 的一部分.

(1)求曲线 E 的标准方程;

(2)已知点 $C(-3,0)$,$D(2,0)$,过点 D 的动直线与曲线 E 交于 M,N 两点,设$\triangle CMN$ 的外心为 Q,O 为坐标原点,问:直线 OQ 与直线 MN 的斜率之积是否为定值,如果是定值,求出该定值;如果不是定值,说明理由.

19.(本小题满分 17 分)

n 为不小于 3 的正整数,对整数数列 $S_0:a_1,a_2,\cdots,a_n$,可以做以下三种变换:

①将 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中的 a_1 减 1,a_2 加 1,其余项不变,称此变换为对 S_0 做 A_1 变换;

②取 $i\in\{2,\cdots,n-1\}$,将 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中的 a_i 减 2,a_{i-1},a_{i+1}均加 1,其余项不变,称此变换为对 S_0 做 A_i 变换;

③将 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中的 a_n 减 1,a_{n-1}加 1,其余项不变,称此变换为对 S_0 做 A_n 变换.

将数列 S_0 做一次变换得到 S_1,将数列 S_1 做一次变换得到 S_2……

例如:$n=4$ 时,对数列 $S_0:0,-1,1,0$ 依次做 A_3,A_4 变换,意义如下:

先对 S_0 做 A_3 变换得到数列 $S_1:0,0,-1,1$,再对 S_1 做 A_4 变换得到数列 $S_2:0,0,0,0$.

(1)$n=5$ 时,给定数列 $S_0:0,-1,1,0,0$,求证:可以对 S_0 做若干次变换得到数列 0,0,0,0,0;

(2)$n=5$ 时,求证:对任意整数数列 $S_0:a_1,a_2,a_3,a_4,a_5$,若 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0$,则可以对 S_0 做若干次变换得到数列 0,0,0,0,0;

(3)若将变换①中的 a_2 改为 a_3,将变换③中的 a_{n-1}改为 a_{n-2},在 $n=10$ 时,求证:对任意整数数列 $S_0:a_1,a_2,\cdots,a_{10}$,若 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=0$,且 $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$ 和 $a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}$均为偶数,则可以对整数数列 S_0 做若干次变换得到数列$\underbrace{0,0,\cdots,0}_{10个}$.