数学试题参考答案及评分标准

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求.

1.B　2.C　3.C　4.D　5.D　6.A　7.C　8.C

二、选择题:本题共 3 小题,每小题 6 分,共 18 分.9、10 题选对 1 个得 2 分,选对 2 个得 4 分,全部选对的得 6 分,有选错的得 0 分;11 题选对 1 个得 3 分,全部选对的得 6 分,有选错的得 0 分.

9.ABD　10.ACD　11.AD

三、填空题:本题共 3 小题,每小题 5 分,共 15 分.

12.4　13.$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　14.第一空为$(-1)^k k$(2 分),第二空为 $2^{k-1}+\frac{k}{2}[1+(-1)^k]$(3 分)

四、解答题:本题共 5 小题,共 77 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.【详细过程】

(1)证明:因为 $CE=DE$,O 为 CD 的中点,

所以 $CD\perp OE$,

又 $SO\perp CD$,且 $OE\cap SO=O$,

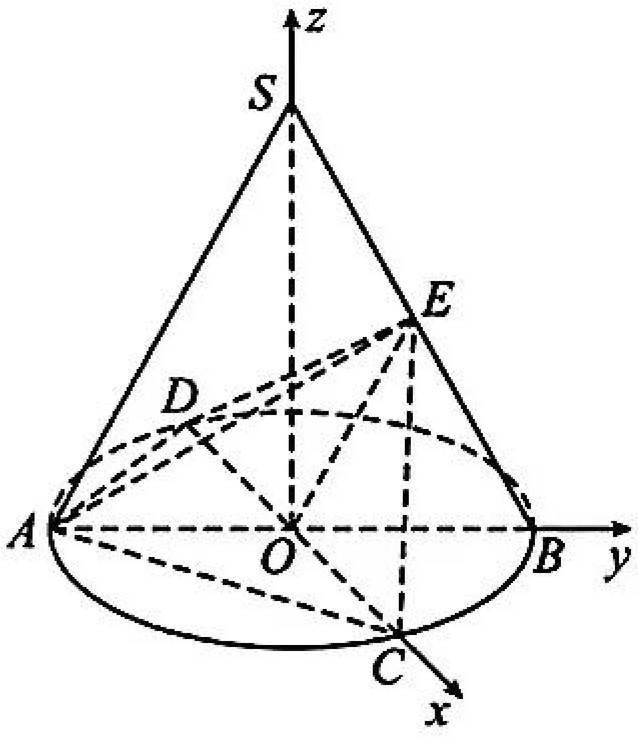
所以 $CD\perp$平面 SAB.

又 $AB\subset$平面 SAB,所以 $AB\perp CD$. …………………………………………………………(5 分)

(2)由题意,在$\triangle CDE$ 中,$CD^2=CE^2+DE^2$,所以 $CE\perp DE$,所以 $OE=\frac{1}{2}CD$,

又 $OE=\frac{1}{2}SB$,所以 $SB=CD$

设 $AB=4$,建立如图所示空间直角坐标系 $O-xyz$,则 $O(0,0,0)$,$A(0,-2,0)$,$C(2,0,0)$,$E(0,1,\sqrt{3})$,所以$\overrightarrow{OC}=(2,0,0)$,$\overrightarrow{OE}=(0,1,\sqrt{3})$,$\overrightarrow{AC}=(2,2,0)$,$\overrightarrow{AE}=(0,3,\sqrt{3})$, …… (7 分)



设平面 ACE 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则

$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AE}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x_1+y_1=0\\ \sqrt{3}y_1+z_1=0\end{cases}$，取 $y_1=-1$，则 $\boldsymbol{m}=(1,-1,\sqrt{3})$

设平面 CED 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OC}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OE}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}x_2=0\\ y_2+\sqrt{3}z_2=0\end{cases}$，取 $z_2=-1$，则 $\boldsymbol{n}=(0,\sqrt{3},-1)$. ………………………… (11 分)

因此 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=-\dfrac{\sqrt{15}}{5}$，

由图可知，二面角 $A-CE-D$ 为锐角，所以二面角 $A-CE-D$ 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. … (13 分)

16.【详细过程】

(1)证明：记角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，

由题意，$\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{5}c^2$，

由正弦定理得，$\dfrac{1}{2}\sin A\sin B\sin C=\dfrac{1}{5}\sin^2 C$ ………………………………………… (3 分)

因为 $\sin C\neq 0$，

所以 $\sin C=\dfrac{5}{2}\sin A\sin B$. ………………………………………………………… (5 分)

(2)在$\triangle ABD$ 中，由余弦定理得，$c^2=AD^2+\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}aAD$①

同理，在$\triangle ACD$ 中，$b^2=AD^2+\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}aAD$②

①－②得，$c^2-b^2=\sqrt{2}aAD$. ……………………………………………………… (11 分)

在$\triangle ACD$ 中，由正弦定理得，$AD=\dfrac{\sin C}{\sin\angle ADC}AC=\sqrt{2}b\sin C$，

所以 $c^2-b^2=2ab\sin C=\dfrac{4}{5}c^2$，即$\dfrac{c}{b}=\sqrt{5}$，

所以$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{c}{b}=\sqrt{5}$. ………………………………………………………… (15 分)

17.【详细过程】

(1)证明：$f(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$.

当 $a\geqslant 0$ 时，$ax^2\geqslant 0$，要证 $f(x)\geqslant 1$，只需证 $\ln(x+1)+\dfrac{1}{x+1}\geqslant 1$ ……………… (2 分)

令 $g(x)=\ln(x+1)+\dfrac{1}{x+1}$，则 $g'(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$，令 $g'(x)=0$，得 $x=0$，

所以当$-1<x<0$时，$g'(x)<0$，$g(x)$在$(-1,0)$上单调递减；

当$x>0$时，$g'(x)>0$，$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

所以$g(x)\geqslant g(0)=1$，即$\ln(x+1)+\dfrac{1}{x+1}\geqslant 1$. 证毕 …………………………(5分)

(2)$f(x)+f(-x)=\ln(1-x^2)+\dfrac{2}{1-x^2}+2ax^2$，

令$t=1-x^2$，由题意，$\ln t+\dfrac{2}{t}-2at+2a-2\geqslant 0$在$t\in(0,1]$时恒成立 ………………(7分)

设$h(t)=\ln t+\dfrac{2}{t}-2at+2a-2$，$t\in(0,1]$.

则$h'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{2}{t^2}-2a=\dfrac{-2at^2+t-2}{t^2}$，令$\varphi(t)=-2at^2+t-2$，

当$a\geqslant -\dfrac{1}{2}$时，$\varphi(t)\leqslant t^2+t-2\leqslant 0$，所以$h'(t)\leqslant 0$，$h(t)$在$(0,1]$上单调递减，所以$h(t)\geqslant h(1)=0$，符合题意 …………………………………………………………(11分)

当$a<-\dfrac{1}{2}$时，$\varphi(t)$在$(0,1)$上单调递增，又$\varphi(0)=-2<0$，$\varphi(1)=-2a-1>0$，所以存在$t_0\in(0,1)$，使得$\varphi(t_0)=0$，且$t_0<t<1$时，$\varphi(t)>0$，即$h'(t)>0$，所以$h(t)$在$(t_0,1]$上单调递增，所以$h(t)\leqslant h(1)=0$，不符合题意 ………………………………………………(14分)

综上所述，a的取值范围为$[-\dfrac{1}{2},+\infty)$ ……………………………………………(15分)

18.【详细过程】

(1)由题意，$a=1$，$c=2$，所以$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{3}$，所以$C$的方程为$y^2-\dfrac{x^2}{3}=1$. ………(3分)

(2)(ⅰ)由题意，直线BD的斜率存在，设直线BD方程为：$y=kx-2$，$B(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$.

由$\begin{cases}y^2-\dfrac{x^2}{3}=1\\ y=kx-2\end{cases}$，消去$y$整理得，$(3k^2-1)x^2-12kx+9=0$

所以$3k^2-1>0$，即$k^2>\dfrac{1}{3}$，$\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{12k}{3k^2-1}\\ x_1x_2=\dfrac{9}{3k^2-1}\end{cases}$ …………………………………(6分)

所以$t=\dfrac{1}{2}(x_1+x_2)=\dfrac{6k}{3k^2-1}$，由$\begin{cases}y^2-\dfrac{x^2}{3}=1\\ x=\dfrac{6k}{3k^2-1}\end{cases}$解得$y=\pm\dfrac{3k^2+1}{3k^2-1}$，

所以$E\left(\dfrac{6k}{3k^2-1},-\dfrac{3k^2+1}{3k^2-1}\right)$ ……………………………………………(8分)

所以直线 AE 方程为：$y=\dfrac{1+\dfrac{3k^2+1}{3k^2-1}}{-\dfrac{6k}{3k^2-1}}x+1$，即 $y=-kx+1$，

由 $\begin{cases}y=kx-2\\y=-kx+1\end{cases}$ 得 $y=-\dfrac{1}{2}$，所以直线 AE 与直线 BD 的交点在一条定直线 $y=-\dfrac{1}{2}$ 上. …………………………………………………………………………………………（10 分）

（ⅱ）过 B,D,E 三点的圆经过定点，理由如下：

由弦长公式 $|BD|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\left(\dfrac{12k}{3k^2-1}\right)^2-\dfrac{36}{3k^2-1}}$

$=\dfrac{6k^2+6}{3k^2-1}$. ……………………………………………………………………………………（12 分）

设线段 BD 的中点为 $G(t,y_0)$，则 $y_0=kt-2=\dfrac{2}{3k^2-1}$，

所以 $|EG|=\dfrac{2}{3k^2-1}+\dfrac{3k^2+1}{3k^2-1}=\dfrac{3k^2+3}{3k^2-1}$，

所以 $|BD|=2|EG|$，即点 E 在以线段 BD 为直径的圆上. ……………………………………（14 分）

又 $|AG|=\sqrt{\left(\dfrac{6k}{3k^2-1}\right)^2+\left(\dfrac{2}{3k^2-1}-1\right)^2}=\dfrac{3k^2+3}{3k^2-1}$，即 $|AG|=|EG|$，

所以 A 在以线段 BD 为直径的圆上，

所以过 B,D,E 三点的圆经过定点 $A(0,1)$. ………………………………………………………（17 分）

19.【详细过程】

(1)因为 $a_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$，

所以 $a_{n-1}+a_{n-2}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}=2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n=2a_n=2(a_n-2+2)$

所以数列 $\{a_n\}$ 是 $P(2,-2)$ 数列. ……………………………………………………………………（2 分）

(2)证明：因为 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列

所以 $a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_{n-k}=(a_n-2)+(a_n-4)+\cdots+(a_n-2k)$

$=ka_n-(2+4+\cdots+2k)=ka_n-\dfrac{k(2+2k)}{2}=ka_n-k^2-k=k(a_n-k-1)$

所以，对任意 $k\in\mathbf{N}_+$，公差为 2 的等差数列 $\{a_n\}$ 都是 $P(k,1)$ 数列. ………………（5 分）

(3)证明：由题意，$a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}=3a_n-3\lambda-9(n\geqslant4)$①

$a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}+a_{n-4}+a_{n-5}+a_{n-6}=6a_n-6\lambda-36(n\geqslant7)$②

②－①得，$a_{n-4}+a_{n-5}+a_{n-6}=3a_n-3\lambda-27(n\geqslant7)$

所以 $a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}=3a_{n+3}-3\lambda-27(n\geqslant4)$③

由①,③得,$3a_{n+3}-3\lambda-27=3a_n-3\lambda-9$

所以 $a_{n+3}-a_n=6(n\geqslant4)$. ……………………………………………………………………………… (8 分)

由①得,$a_n+a_{n-1}+a_{n-2}=3a_{n+1}-3\lambda-9(n\geqslant3)$④

④－①得,$a_n-a_{n-3}=3a_{n+1}-3a_n(n\geqslant4)$

即 $3a_{n+1}=4a_n-a_{n-3}(n\geqslant4)$

所以 $3a_{n+4}=4a_{n+3}-a_n=3a_{n+3}+a_{n+3}-a_n=3a_{n+3}+6(n\geqslant4)$

所以 $a_{n+4}-a_{n+3}=2(n\geqslant4)$

所以 $a_{n+1}-a_n=2(n\geqslant7)$ ……………………………………………………………………………… (11 分)

在③中,分别令 $n=4,5,6,7$,得

$a_1+a_2+a_3=3a_7-3\lambda-27$⑤

$a_2+a_3+a_4=3a_8-3\lambda-27$⑥

$a_3+a_4+a_5=3a_9-3\lambda-27$⑦

$a_4+a_5+a_6=3a_{10}-3\lambda-27$⑧

则⑥－⑤得,$a_4-a_1=3(a_8-a_7)=6$

⑦－⑥得,$a_5-a_2=3(a_9-a_8)=6$

⑧－⑦得,$a_6-a_3=3(a_{10}-a_9)=6$

所以 $a_{n+3}-a_n=6(n\geqslant1)$

所以 $a_{n+1}-a_n=2(n\geqslant4)$ ……………………………………………………………………………… (14 分)

另一方面,由⑧－⑦得,$a_4-a_3=3(a_{10}-a_9)-(a_5-a_4)-(a_6-a_5)=2$

⑦－⑥得,$a_3-a_2=3(a_9-a_8)-(a_4-a_3)-(a_5-a_4)=2$

⑥－⑤得,$a_2-a_1=3(a_8-a_7)-(a_3-a_2)-(a_4-a_3)=2$

所以 $a_{n+1}-a_n=2(n\geqslant1)$

所以数列$\{a_n\}$是公差为 2 的等差数列.

由⑤得,$3\lambda=3a_7-(a_1+a_2+a_3)-27=3a_7-3a_2-27=3$

所以 $\lambda=1$. ……………………………………………………………………………… (17 分)