达州市普通高中2025届第一次诊断性测试
数学 参考答案

一、单项选择题

1.C 2.A 3.A 4.B 5.C 6.D 7.D 8.B

二、多项选择题

9.AB 10.AC 11.BCD

三、填空题

12. -2 13. 90 14. $\frac{23}{216}$

四、解答题

15. 解：（1）当 $n=1$ 时，$S_1=a_1=2$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$S_{n-1}=(n-1)^2+(n-1)=n^2-n$，

$a_n=S_n-S_{n-1}=2n$，

当 $n=1$ 时，$a_1=2=2\times 1$，

$\therefore a_n=2n$.

设等比数列的公比为 q，由题得 $\begin{cases}12=3b_1q,\\ b_1q^2=8\end{cases}$.

解得 $b_1=2$，$q=2$，

$\therefore b_n=2^n$.

（2）由（1）知 $c_n=\dfrac{2}{2(n+1)n}=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，

$T_n=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n$

$T_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=1-\dfrac{1}{n+1}$，

$\therefore T_n=1-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$.

16. 解：（1）在 $\triangle ABC$ 中由正弦定理得 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$，

代入已知化简得，$\sin A\cos C+\cos A\sin C=\sin B\sin(A-C)$，

$\therefore \sin(A+C)=\sin B\sin(A-C)$.

又$\because$在 $\triangle ABC$ 中有 $A+C=\pi-B$，

$\therefore \sin(A+C)=\sin(\pi-B)=\sin B$，

即 $\sin B=\sin B\sin(A-C)$.

又$\because$在 $\triangle ABC$ 中有 $\sin B>0$，$-\pi<A-C<\pi$，

$\therefore \sin(A-C)=1$，$A-C=\dfrac{\pi}{2}$，

$\therefore A=C+\dfrac{\pi}{2}$.

（2）由正弦定理得$\sin C=\dfrac{c}{2\sqrt{5}}=\dfrac{2}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

由（1）知$0<C<\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore \cos C=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin A=\sin(\dfrac{\pi}{2}+C)=\cos C=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

又$\because \sin A=\dfrac{a}{2\sqrt{5}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\therefore a=4$.

又$\because \sin B=\sin(A+C)=\sin(\dfrac{\pi}{2}+2C)=\cos 2C=1-2\sin^2 C=\dfrac{3}{5}$.

$\therefore \triangle ABC$的面积$S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times 4\times 2\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{12}{5}$.

17. 解：（1）如图，连接AC交BD于点O，$\therefore AC\perp BD$.

连接PO，根据正四棱锥的性质知$PO\perp$平面$ABCD$，

即PO为正四棱锥的高，$\therefore PO=\sqrt{2}$，

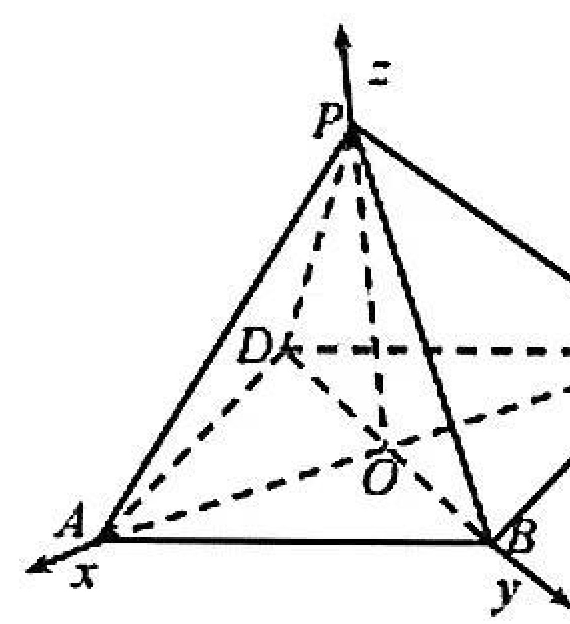
又$\because V=\dfrac{1}{3}\times AB^2\times PO=\dfrac{1}{3}\times AB^2\times 2=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$，

解得$AB=2$.

易知OA，OB，OP互相垂直，

$\therefore$建立如图所示的空间直角坐标系$O-xyz$，

$P(0,0,\sqrt{2})$，$A(\sqrt{2},0,0)$，$D(0,-\sqrt{2},0)$.



设平面PAD的法向量$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

$\therefore \begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PA}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DA}=0\end{cases}$，$\begin{cases}x-z=0,\\ x+y=0\end{cases}$

令$x=1$，则$y=-1$，$z=1$，

$\therefore$平面PAD的一个法向量$\boldsymbol{m}=(1,-1,1)$.

又$\because OA\perp BD$，$OA\perp PO$，$BD\cap PO=O$，

$\therefore OA\perp$平面PBD.

$\therefore$平面PBD的一个法向量$\boldsymbol{n}=(1,0,0)$，

$\because \cos<\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}>=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore$平面PAD与平面PBD的夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

（2）由（1）知$PA=2$，$AB=AD=2$，$AC=2\sqrt{2}$.

由题知2秒后该蚂蚁等可能在点A，B，C，D，记2秒后该蚂蚁与点A的距离为X，

则d的所有可能取值为0，2，$2\sqrt{2}$.

$\because P(X=0)=\dfrac{1}{4}$，$P(X=2)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$，$P(X=2\sqrt{2})=\dfrac{1}{4}$.

$\therefore$ X的分布列为：

X	0	2	$2\sqrt{2}$
P	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{4}$

$\therefore E(X)=0\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}+2\sqrt{2}\times\frac{1}{4}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

18. 解：(1) $\because f'(x)=(x-1)^2+2(x+1)(x-1)=(x-1)(3x+1)$，

令 $f'(x)>0$，解得 $x<-\frac{1}{3}$，或 $x>1$.

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,-\frac{1}{3})$ 上单调递增，在 $(-\frac{1}{3},1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(-\frac{1}{3})=\frac{32}{27}$，极小值为 $f(1)=0$

(2) 令 $h(x)=f(x)-g(x)=x^3-a\ln x$，$h'(x)=\frac{3x^3-a}{x}>0$，$x>(\frac{a}{3})^{\frac{1}{3}}$.

又 $\because x>0$，$0<a\leqslant 3e$，

$\therefore h(x)$ 在 $(0,(\frac{a}{3})^{\frac{1}{3}})$ 上单调递减，在 $((\frac{a}{3})^{\frac{1}{3}},+\infty)$ 上单调递增.

$\therefore h(x)\geqslant h((\frac{a}{3})^{\frac{1}{3}})=\frac{a}{3}-\frac{a}{3}\ln\frac{a}{3}=\frac{a}{3}(1-\ln\frac{a}{3})$，

$\because 0<a\leqslant 3e$，$\therefore 0<\frac{a}{3}\leqslant e$，$0<\ln\frac{a}{3}\leqslant 1$，

$\therefore \frac{a}{3}(1-\ln\frac{a}{3})\geqslant 0$. 即当 $0<a\leqslant 3e$ 时，$h(x)\geqslant 0$ 恒成立，

$\therefore$ 当 $0<a\leqslant 3e$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$.

(3) 设 $F(x)=g(x)+1=a\ln x-x^2-x+2$，$F'(x)=\frac{a}{x}-2x-1$.

①当 $a\leqslant 0$ 时，$F'(x)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，$F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.
即对任意 $x\in(0,1)$ 的都有 $F(x)>F(1)=0$ 与 $F(x)\leqslant 0$ 矛盾，
$\therefore a\leqslant 0$ 不满足题意.

②当 $a>0$ 时，$F'(x)=\frac{a}{x}-2x-x=\frac{-2x^2-x+a}{x}$，

设 $d(x)=-2x^2-x+a$，$\because \Delta=1+8a>0$，

$\therefore$ 关于 x 的方程 $d(x)=0$ 有两根，$x_1=\frac{-1-\sqrt{1+8a}}{4}<0$，$x_2=\frac{-1+\sqrt{1+8a}}{4}>0$，

$\because \begin{cases}x>0,\\F'(x)>0\end{cases}$ 的解为 $0<x<x_2$，即 $F(x)$ 在 $(0,x_2)$ 上单调递增，在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore F(x)\leqslant F(x_2)=a\ln x_2-x_2^2-x_2+2$.

$\because d(x_2)=-2x_2^2-x_2+a=0$，

$\therefore a=2x_2^2+x_2$，$F(x_2)=(2x_2^2+x_2)\ln x_2-x_2^2-x_2+2$.

$F'(x_2)=(4x_2+1)\ln x_2>0$ 的解为 $x_2>1$，即 $F(x_2)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

$\because F(x_2)\geqslant F(1)=0$，

$\therefore$ 只有当 $x_2=1$ 时，即 $\frac{-1+\sqrt{1+8a}}{4}=1$，$a=3$ 时才满足题意.

$\therefore$ 实数 a 的值为3.

19. 解：(1)设曲线 M' 上任意点 (x', y')，由 $\begin{cases} x'=3x, \\ y'=2y \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=\dfrac{x'}{3}, \\ y=\dfrac{y'}{2} \end{cases}$，

又 $x^2+y^2=1$，$\therefore \dfrac{x'^2}{9}+\dfrac{y'^2}{4}=1$，即 M' 的方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

(2) $\because$ $\Gamma: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$，点 $H(x_0, y_0)$，l 通过变换 $\varphi: \begin{cases} x'=\dfrac{1}{a}x, \\ y'=\dfrac{1}{b}y \end{cases}$ 得到

$\Gamma': x'^2+y'^2=1$，$H'(\dfrac{x_0}{a}, \dfrac{y_0}{b})$，$l'$，

$\therefore$ 曲线 $\Gamma': x'^2+y'^2=1$ 在点 $H'(\dfrac{x_0}{a}, \dfrac{y_0}{b})$ 处的切线为 l'.

当 l' 的斜率存在时，$k=-\dfrac{1}{k_{OH'}}=-\dfrac{bx_0}{ay_0}$，

切线方程为 $y'-\dfrac{y_0}{b}=-\dfrac{bx_0}{ay_0}(x'-\dfrac{x_0}{a})$，又 $x'=\dfrac{x}{a}$，$y'=\dfrac{y}{b}$，

即 $\dfrac{y}{b}-\dfrac{y_0}{b}=-\dfrac{bx_0}{ay_0}(\dfrac{x}{a}-\dfrac{x_0}{a})$，$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=\dfrac{x_0^{\ 2}}{a^2}+\dfrac{y_0^{\ 2}}{b^2}=1$，

$\therefore$ 切线方程为 $l: \dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$ ①.

当 l' 的斜率不存在时，$\dfrac{y_0}{b}=0$，$l: x=x_0$ 也满足方程①.

$\therefore l$ 的方程为：$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1$.

(3) 由 $\begin{cases} y=x, \\ \dfrac{x^2}{2i}+\dfrac{y^2}{i}=1 \end{cases}$ 解得 $P_i(\dfrac{\sqrt{6i}}{3}, \dfrac{\sqrt{6i}}{3})$，

由（2）知曲线 E_i 在点 P_i 处的切线 $l_i: \dfrac{\sqrt{6i}x}{6i}+\dfrac{\sqrt{6i}y}{3i}=1$，

即 $l_i: x+2y=\sqrt{6i}$.

由 $\begin{cases} x+2y=\sqrt{6i}, \\ x^2+2y^2=2(i+1) \end{cases}$ 得 $3x^2-2\sqrt{6i}x+2i-4=0$，$\Delta=4\sqrt{3}$.

设 l_i 与 E_{i+1} 的交点分别为 $M_{i1}(x_{i1}, y_{i1})$，$N_{i2}(x_{i2}, y_{i2})$，

$\therefore x_{i1}+x_{i2}=\dfrac{2\sqrt{6i}}{3}$，$x_{i1}\cdot x_{i2}=\dfrac{2i-4}{3}$，$|M_{i1}N_{i2}|=\sqrt{1+\dfrac{1}{4}}|x_{i1}-x_{i2}|=a_i$，

$\therefore a_i=\sqrt{1+\dfrac{1}{4}}\times\dfrac{\sqrt{\Delta}}{3}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\times\dfrac{4\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2\sqrt{15}}{3}$.

$\therefore \sum\limits_{i=1}^{n}a_i=\dfrac{2\sqrt{15}}{3}n$.