达州市普通高中2025届第一次诊断性测试

数学试题

（本试卷满分150分，考试时间120分钟）

注意事项：

1.答题前，考生务必将自己的班级、姓名、准考证号用0.5毫米的黑色签字笔填写在答题卡上，并检查条形码粘贴是否正确。

2.选择题使用2B铅笔填涂在答题卡对应题目标号的位置上，非选择题用0.5毫米的黑色签字笔书写在答题卡的对应题框内，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。

3.考试结束以后， 将答题卡收回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知集合$M=\{x|-1<x<3\}$，若$P\cup M=M$，则集合P可以为

A．$\{3\}$　　B．$[-1,1]$　　C．$(0,3)$　　D．$[-1,3]$

2．以双曲线$x^2-\frac{y^2}{3}=1$的右焦点为圆心，离心率为半径的圆的方程为

A．$(x-2)^2+y^2=4$　　B．$(x+2)^2+y^2=4$

C．$(x+2)^2+y^2=2$　　D．$(x-2)^2+y^2=2$

3．已知α为直线$y=2x-1$的倾斜角，则$\cos 2\alpha=$

A．$-\frac{3}{5}$　　B．$-\frac{4}{5}$　　C．$\frac{4}{5}$　　D．$\frac{3}{5}$

4．已知三个不同的平面α，β，γ，且$\alpha\perp\beta$，则$\gamma\perp\beta$是$\alpha // \gamma$的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

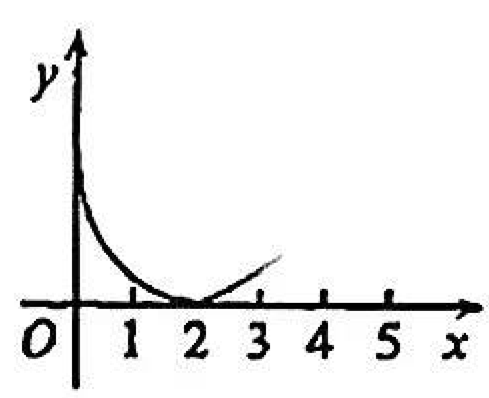
5．已知可导函数$f(x)$的部分图象如图所示，$f(2)=0$，$f'(x)$为函数$f(x)$的导函数，下列结论不一定成立的是

A．$f'(1)<f(1)$

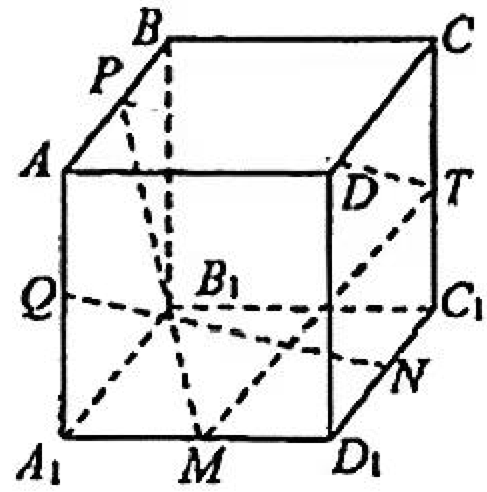
B．$f'(2)=f(2)$

C．$f'(4)<f(4)$

D．$f'(3)<f'(4)<f'(5)$



6. 如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点P，Q，M，N，T分别为所在棱的中点，则



A. $QN\perp BB_1$

B. $QN//$平面BCC_1B_1

C. 直线QN与PT为异面直线

D. $B_1D\perp$平面PMT

7. 如图1，圆锥的母线长为3，底面圆直径$BC=2$，点D为底面BC的中点，则在该圆锥的侧面展开图（图2）中$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=$

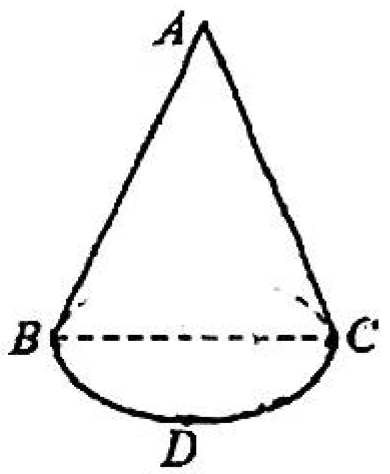


图1

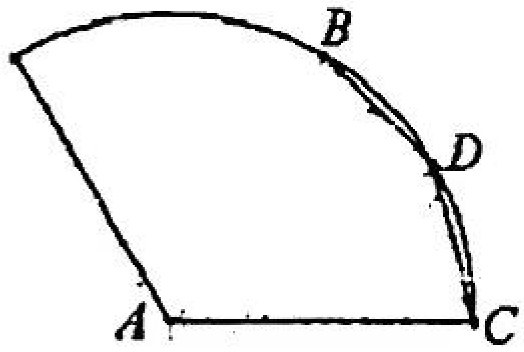


图2

A. $-\dfrac{9}{2}$　　B. $-9\sqrt{3}$

C. $9-9\sqrt{3}$　　D. $\dfrac{27-18\sqrt{3}}{2}$

8. 已知函数$f(x)=\begin{cases}-xe^{x}-(x+a)^2, & x\leqslant 0,\\ bxe^{-x}+cx^2, & x>0\end{cases}$的图象关于原点对称，则下列叙述错误的是

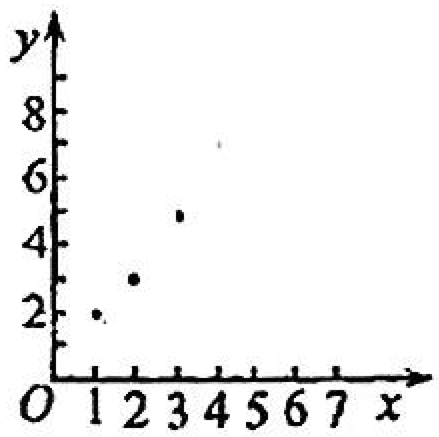
A. $a+b+c=0$　　B. $f(x)$既有最小值也有最大值

C. $f(x)$有3个零点　　D. $f(x)$有2个极值点

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分。

9. 国家统计局7月15日发布数据显示，2024年上半年我国经济运行总体平稳，其中新能源产业依靠持续的技术创新实现较快增长．某企业根据市场调研得到研发投入x（亿元）与产品收益y（亿元）的数据统计如下，则下列叙述正确的是

x	1	2	3	4	5	6	7
y	2	3	5	7	8	8	9



A. $\overline{x}=4$，$\overline{y}=6$

B. 由散点图知变量x和y正相关

C. 用最小二乘法求得y关于x的经验回归直线方程为$\hat{y}=1.5x+0.5$

D. 收益y的方差为6

10．$f_1(x)$为函数$f(x)$的导函数，记为$f_1(x)=[f(x)]'$，依次类推$f_2(x)=[f_1(x)]'$，…，$f_n(x)=[f_{n-1}(x)]'\ (n\geqslant 2, n\in\mathbf{N}^*)$，已知$f(x)=\sin x$，$a_n=f_n(x)$，数列$\{a_n\}$的前项和为$S_n$，则

A．$a_{2025}=\cos x$　　B．$S_{2025}=\sin x$

C．存在$k\in\mathbf{N}^*$，使得S_k在$[-\frac{1}{2}, 0]$上单调递增　　D．$-1\leqslant S_n\leqslant 1$

11．抛物线有如下光学性质：平行于抛物线对称轴的入射光线经抛物线反射后必过抛物线的焦点．已知抛物线$y^2=4x$的焦点为F，O为坐标原点，从点$P(x_0, y_0)\ (4x_0>{y_0}^2>0)$发出平行于$x$轴的光线经过抛物线上的点$N$反射后再经过抛物线上另一点$M$，则

A．存在点P使得点P，N，O，M、都在以F为圆心的圆上

B．存在点P使得点F是$\triangle POM$的垂心

C．存在点P使得点F是$\triangle POM$的重心

D．点M到直线PN的最短距离为4

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分。

12．若复数$z=1-\mathrm{i}$是方程$x^2+ax+2=0\ (a\in\mathbf{R})$的一个根，则$a=$________．

13．二项式$(1-3x)^n=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，若$|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_n|=1024$，则$a_2=$________．

14．掷一枚质地均匀的骰子3次，将每次骰子正面朝上的数字依次记为x，y，z，则不等式$|x+y-z|+|x-y+z|+|-x+y+z|<8$成立的概率是________．

四、解答题：本题共5小题，共77分。解答应写文字说明、证明过程或演算步骤。

15．（13分）

记数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n=n^2+n$．数列$\{b_n\}$是等比数列，且$3b_2=S_3$，$b_3=a_4$．

（1）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

（2）记$c_n=\dfrac{2}{a_{n+1}\log_2 b_n}$，求数列$\{c_n\}$的前$n$项和$T_n$

16．（15分）

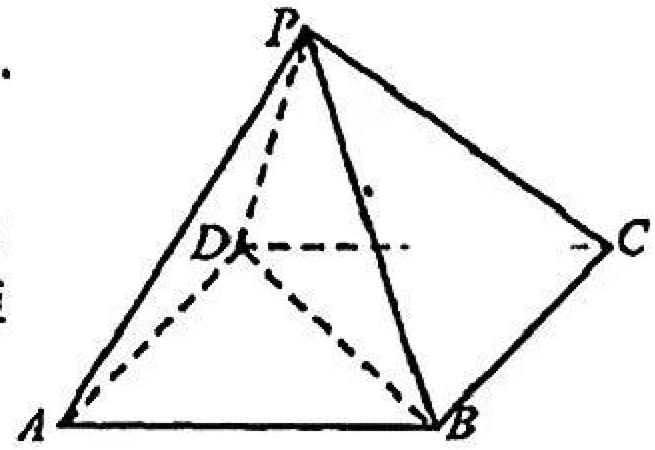
已知$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，$a\cos C+c\cos A=b\sin(A-C)$．

（1）证明：$A=C+\dfrac{\pi}{2}$；

（2）若$\triangle ABC$的外接圆半径为$\sqrt{5}$，且$c=2$，求$\triangle ABC$的面积．

17．（15分）

如图，已知正四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$，高为 $\sqrt{2}$．



（1）求平面 PAD 与平面 PBD 的夹角的余弦值；

（2）现有一蚂蚁从 P 点处等可能地沿各条棱向底面匀速移动，已知该蚂蚁每秒移动1个单位，求2秒后该蚂蚁与点 A 的距离 X 的分布列及期望．

18．（17分）

已知函数 $f(x)=(x+1)(x-1)^2$，$g(x)=a\ln x-x^2-x+1$，$a\in\mathbf{R}$．

（1）求 $f(x)$ 的极值；

（2）证明：当 $0<a\leqslant 3e$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$；

（3）若 $g(x)\leqslant -1$，求 a 的值．

19．（17分）

已知点 $P(x,\ y)$ 是平面直角坐标系中的任意一点，在变换 $\varphi:\begin{cases}x'=\lambda x,(\lambda>0),\\ y'=\mu y,(\mu>0)\end{cases}$ 的作用下，点 $P(x,\ y)$ 对应到点 $P'(x',\ y')$，称 φ 为平面直角坐标系中的坐标伸缩变换．如：$y=\sin x$ 在变换 $\varphi:\begin{cases}x'=\dfrac{1}{2}x,\\ y'=2y\end{cases}$ 的作用下得到 $y'=2\sin 2x'$．

（1）已知曲线 $M:x^2+y^2=1$ 在 $\varphi:\begin{cases}x'=3x,\\ y'=2y\end{cases}$ 的作用下得到曲线 M'，求 M' 的方程；

（2）已知椭圆 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 在变换 $\varphi:\begin{cases}x'=\dfrac{1}{a}x,\\ y'=\dfrac{1}{b}y\end{cases}$ 下保持位置关系不变性，即点 H 在曲线 Γ 上，在变换 φ 下 H' 也在曲线 Γ' 上；直线 l 与 Γ 相切，在变换 φ 下直线 l' 与 Γ' 也相切．已知点 $H(x_0,\ y_0)$ 是 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 上一动点，直线 l 是 Γ 在 H 处的切线．用上述结论求 l 的方程；

（3）已知直线 $y=x$ 与曲线 $E_i:\dfrac{x^2}{2}+y^2=i\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n+1)$ 在第一象限的交点为 P_i，E_i 在 P_i 处的切线被 E_{i+1} 所截得的弦长记为 a_i，求 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$．