内江市高中2025届第一次模拟考试题

数学

本试卷共4页，19小题，满分150分，考试用时120分钟．

注意事项：

1．答题前，考生务必将自己的姓名、考号、班级用签字笔填写在答题卡相应位置．

2．选择题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑．如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案．不能答在试题卷上．

3．非选择题用签字笔将答案直接答在答题卡相应位置上．

4．考试结束后，监考人员将答题卡收回．

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 在复平面内，复数z的对应点坐标为$\left(1,-2\right)$，则z^2的共轭复数为（　）

A. $-3+4\mathrm{i}$　　B. $-3-4i$　　C. $3+4\mathrm{i}$　　D. $3-4\mathrm{i}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据复数的几何意义可知$z=1-2i$，再根据复数的乘法以及共轭复数的定义分析判断．

【详解】因为复数z的对应点坐标为$\left(1,-2\right)$，则$z=1-2i$，

可得$z^2=\left(1-2\mathrm{i}\right)^2=-3-4\mathrm{i}$，

所以z^2的共轭复数为$-3+4\mathrm{i}$．

故选：A．

2. 已知集合$A=\left\{x\middle|x^2-x-6<0\right\}$，$B=\left\{x\middle|y=\log_2\left(x+1\right)\right\}$，则$A\cap B=$（　）

A. $\left(-3,+\infty\right)$　　B. $\left(-2,+\infty\right)$　　C. $\left(-1,2\right)$　　D. $\left(-1,3\right)$

【答案】D

【解析】

【分析】求出集合A、B，再利用交集的定义可求得集合$A\cap B$．

【详解】因为$A=\left\{x\middle|x^2-x-6<0\right\}=\left\{x\middle|-2<x<3\right\}$，

$B=\left\{x\middle|y=\log_2\left(x+1\right)\right\}=\left\{x\middle|x+1>0\right\}=\left\{x\middle|x>-1\right\}$，

所以，$A\cap B=(-1,3)$.

故选：D.

3. 已知两个向量$\vec{a}=(\sqrt{2},m)$，$\vec{b}=(-3,1)$，且$(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})$，则$m$的值为（　）

A. $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　B. $\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　C. $\pm2\sqrt{2}$　　D. $\pm\sqrt{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据向量垂直可得$\vec{a}^2=\vec{b}^2$，再结合向量的坐标运算求解即可.

【详解】因为$(\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-\vec{b})$，则$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2=0$，即$\vec{a}^2=\vec{b}^2$，

又因为$\vec{a}=(\sqrt{2},m)$，$\vec{b}=(-3,1)$，则$2+m^2=9+1$，解得$m=\pm2\sqrt{2}$.

故选：C.

4. “$m<\dfrac{1}{4}$”是“$\dfrac{1}{m}>4$”的（　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【答案】B

【解析】

【分析】根据充分条件和必要条件的定义研究条件的充分性和必要性.

【详解】若$\dfrac{1}{m}>4$，假设$m\geq\dfrac{1}{4}$，则由$m\geq\dfrac{1}{4}>0$可知$\dfrac{1}{m}\leq\dfrac{1}{\frac{1}{4}}=4$，矛盾，所以$m<\dfrac{1}{4}$，这表明条件是必要的；

对$m=-1$，有$m=-1<\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{m}=\dfrac{1}{-1}=-1\leq4$，这表明条件不是充分的.

所以“$m<\dfrac{1}{4}$”是“$\dfrac{1}{m}>4$”的必要不充分条件.

故选：B.

5. 已知一批产品中有90%是合格品，检验产品质量时，一个合格品被误判为次品的概率为0.05，一个次品被误判为合格品的概率为0.01. 任意抽查一个产品，检查后被判为合格品的概率为（　）

A. 0.855　　B. 0.856　　C. 0.86　　D. 0.865

【答案】B

【解析】

【分析】记事件A:抽取的一个产品为合格品，事件B:抽查一个产品被判为合格品，利用全概率公式可求得$P(B)$的值.

【详解】记事件A:抽取的一个产品为合格品，事件B:抽查一个产品被判为合格品，

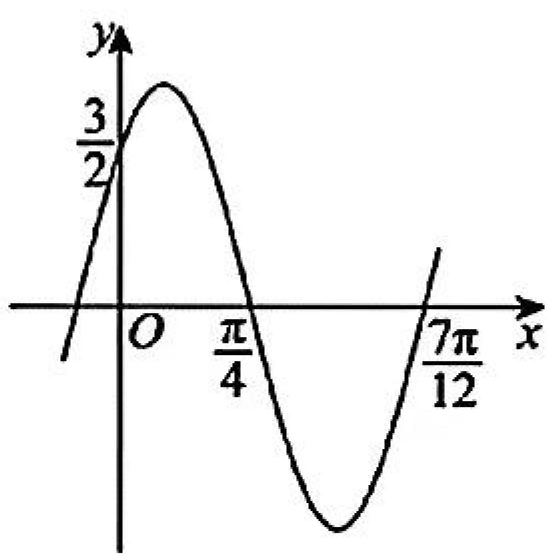
则$P(A)=0.9$，$P(B|A)=0.95$，$P(B|\overline{A})=0.01$，

由全概率公式可得$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.9\times 0.95+0.1\times 0.01=0.856$.

所以，任意抽查一个产品，检查后被判为合格品的概率为0.856.

故选：B.

6. 函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$的部分图象如图所示，若$x_1$、$x_2\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，且$f(x_1)=f(x_2)$，则$f(x_1+x_2)=$（　）



A. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 0

【答案】C

【解析】

【分析】利用图象求出函数$f(x)$的解析式，利用正弦型函数的对称性可求出x_1+x_2的值，代值计算可得出$f(x_1+x_2)$的值.

【详解】由图可知，函数$f(x)$的最小正周期为$T=2\times\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\pi}{3}$，则$\omega=\frac{2\pi}{T}=3$，

所以，$f(x)=A\sin(3x+\varphi)$，

因为$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=A\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\varphi\right)=0$，且函数$f(x)$在$x=\frac{\pi}{4}$附近单调递减，

所以，$\frac{3\pi}{4}+\varphi=2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得$\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$，

又因为$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以，$\varphi=\frac{\pi}{4}$，则$f(x)=A\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$，

因为$f(0)=A\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}A=\frac{3}{2}$，可得$A=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

所以，$f(x)=\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$，

因为x_1、$x_2\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，则$\frac{\pi}{4}<3x_1+\frac{\pi}{4}<\pi$，$\frac{\pi}{4}<3x_2+\frac{\pi}{4}<\pi$，

因为$f(x_1)=f(x_2)$，则$3x_1+\frac{\pi}{4}+3x_2+\frac{\pi}{4}=\pi$，所以，$x_1+x_2=\frac{\pi}{6}$，

故$f(x_1+x_2)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}$.

故选：C.

7. 2024年3月12日是第46个植树节，为加快建设美丽内江、筑牢长江上游生态屏障贡献力量，我市积极组织全民义务植树活动．现有一学校申领到若干包树苗（每包树苗数相同），该校8个志愿小组依次领取这批树苗开展植树活动．已知第1组领取所有树苗的一半又加半包，第2组领取所剩树苗的一半又加半包，第3组也领取所剩树苗的一半又加半包．以此类推，第8组也领取所剩树苗的一半又加半包，此时刚好领完所有树苗．请问该校共申领了树苗多少包？（　）

A. 127　　B. 255　　C. 316　　D. 511

【答案】B

【解析】

【分析】设原有树苗有$x(x>0)$包，求出第1组到第8组所领取树苗的包数，结合等比数列求和公式可得出关于x的等式，解之即可.

【详解】设原有树苗有$x(x>0)$包，第1组领取$\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}(x+1)$包，

第2组领取$\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]=\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2^2}(x+1)$包，

第3组领取$\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\right]=\left(\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{2^3}(x+1)$包，

L ，

以此类推可知，第8组领取$\left(\frac{1}{2^8}x+\frac{1}{2^8}\right)$包，

由题意可得$\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{2^2}(x+1)+\frac{1}{2^3}(x+1)+\cdots+\frac{1}{2^8}(x+1)=x$，

即$\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^8}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^8}=\frac{255}{256}$，解得$x=255$.

故选：B

8. 已知a为常数，函数$f(x)=xe^x-ae^{2x}$有两个极值点x_1、x_2，且$x_1<x_2$，则（　　）

A. $f(x_1)<0$，$f(x_2)>-\frac{1}{2}$　　B. $f(x_1)<0$，$f(x_2)<-\frac{1}{2}$

C. $f(x_1)>0$，$f(x_2)>-\frac{1}{2}$　　D. $f(x_1)>0$，$f(x_2)<-\frac{1}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】由$f'(x)=0$可得出$2a=\frac{x+1}{e^x}$，可知直线$y=2a$与函数$g(x)=\frac{x+1}{e^x}$的图象有两个交点，利用导数分析函数$g(x)$的单调性与极值，数形结合得出$x_2>0>x_1>-1$，计算得出$f(x_1)=\frac{x_1-1}{2}e^{x_1}<0$，$f(x_2)=\frac{x_2-1}{2}e^{x_2}$，构造函数$p(x)=\frac{(x-1)e^x}{2}$，其中$x>0$，利用导数求该函数的值域，即可得出合适的选项.

【详解】因为$f(x)=xe^x-ae^{2x}$，该函数的定义域为R，

$f'(x)=(x+1)e^x-2ae^{2x}=e^x(x+1-2ae^x)$，

由题意可知，x_1、x_2为方程$x+1-2ae^x=0$的两根，

由$x+1-2ae^x=0$可得$2a=\frac{x+1}{e^x}$，令$g(x)=\frac{x+1}{e^x}$，其中$x\in\mathbf{R}$，

由题意可知，直线$y=2a$与函数$g(x)=\frac{x+1}{e^x}$的图象有两个交点，

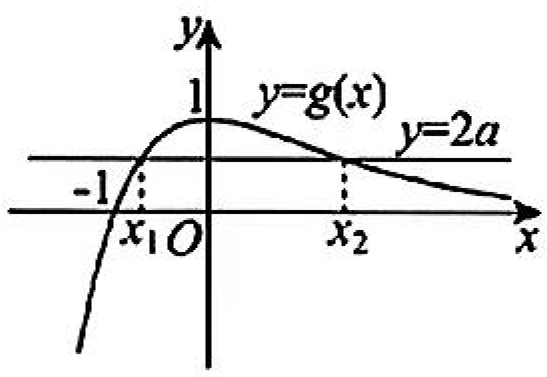
$g'(x)=\frac{1-(x+1)}{e^x}=-\frac{x}{e^x}$，

由$g'(x)<0$可得$x>0$，由$g'(x)>0$可得$x<0$，

所以，函数$g(x)$的增区间为$(-\infty,0)$，减区间为$(0,+\infty)$，

故$g(x)_{极大值}=g(0)=1$，

且当$x<-1$时，$g(x)<0$，当$x>-1$时，$g(x)>0$，如下图所示：



由图可知，当$0<2a<1$时，即当$0<a<\frac{1}{2}$时，直线$y=2a$与函数$g(x)$的图象有两个交点，

且$x_2>0>x_1>-1$，由题意可得$2a=\frac{x_1+1}{e^{x_1}}=\frac{x_2+1}{e^{x_2}}$，

所以，$f(x_1)=x_1e^{x_1}-\frac{x_1+1}{e^{x_1}}\cdot e^{2x_1}=\frac{x_1-1}{2}e^{x_1}<0$，

$f(x_2)=x_2e^{x_2}-\frac{x_2+1}{e^{x_2}}\cdot e^{2x_2}=\frac{x_2-1}{2}e^{x_2}$，

令$p(x)=\frac{(x-1)e^x}{2}$，其中$x>0$，则$p'(x)=\frac{xe^x}{2}>0$，

所以，函数$p(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，则$p(x_2)>p(0)=-\frac{1}{2}$，即$f(x_2)>-\frac{1}{2}$，

故选：A.

【点睛】关键点点睛：解本题的关键在于确定x_1、x_2的取值范围，再结合极值点所满足的条件消去参数a，进而转化为构造函数求值域的问题.

二、选择题：本大题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．

9. 抛掷一枚质地均匀的骰子，观察骰子朝上面的点数，记随机事件$A_i=$“点数为i”，其中$i=1,2,3,4,5,6$，则下列论述正确的是（　）

A. $P(A_1A_2)=0$

B. 若$E=$“点数大于3”，则$P(E)=1-P(A_1)-P(A_2)$

C. 若连续抛掷骰子2次，记$F=$“点数之和为4”，则$P(F)=\frac{1}{12}$

D. 若重复抛掷骰子，则事件A_6发生的频率等于事件A_6发生的概率

【答案】AC

【解析】

【分析】分析可知，$A_1 \cap A_2 = \varnothing$，可判断 A 选项；利用对立事件的概率公式可判断 B 选项；利用古典概型的概率公式可判断 C 选项；利用频率与概率的关系可判断 D 选项.

【详解】对于 A 选项，$A_1 \cap A_2 = \varnothing$，则 $P(A_1A_2)=0$，A 对；

对于 B 选项，若 $E=$ “点数大于 3”，则 $P(E)=1-P(A_1)-P(A_2)-P(A_3)$，B 错；

对于 C 选项，若连续抛掷骰子 2 次，记 $F=$ “点数之和为 4”，

基本事件总数为 $6\times 6=36$，若抛掷骰子，第一次向上的点数为 a，第二次向上的点数为 b，

以 (a,b) 作为一个基本事件，则事件 F 包含的基本事件有：$(1,3)$、$(2,2)$、$(3,1)$，共 3 个基本事件，

由古典概型的概率公式可得 $P(F)=\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$，C 对；

对于 D 选项，若重复抛掷骰子，则事件 A_6 发生的频率在事件 A_6 发生的概率值附近波动，D 错.

故选：AC.

10. 已知 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$，则下列不等关系正确的有（　）

A. $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)<\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$　　　　B. $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha+1}<\dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha+1}$

C. $(\cos\alpha)^{\sin\alpha}<(\sin\alpha)^{\cos\alpha}$　　　　D. $\dfrac{1}{\sin\alpha}+\dfrac{1}{\cos\alpha}<\dfrac{4}{\sin\alpha+\cos\alpha}$

【答案】ABC

【解析】

【分析】利用正切函数的基本性质可判断 A 选项；推导出 $0<\cos\alpha<\sin\alpha<1$，结合函数 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ 的单调性可判断 B 选项；利用函数 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $(0,1)$ 上的单调性可判断 C 选项；利用基本不等式可判断 D 选项.

【详解】对于 A 选项，因为 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $0<\alpha-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\pi}{4}$，

所以，$0<\tan\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)}<1$，故 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)<\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$，A 对；

对于 B 选项，因为$\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，则$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}>1$，所以，$0<\cos\alpha<\sin\alpha<1$，

因为函数$f(x)=\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$在$(0,+\infty)$上为增函数，

所以，$f(\cos\alpha)<f(\sin\alpha)$，即$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha+1}<\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha+1}$，B 对；

对于 C 选项，构造函数$g(x)=\frac{\ln x}{x}$，其中$0<x<1$，则$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}>0$，

所以，函数$g(x)$在$(0,1)$上为增函数，所以，$g(\cos\alpha)<g(\sin\alpha)$，

即$\frac{\ln\cos\alpha}{\cos\alpha}<\frac{\ln\sin\alpha}{\sin\alpha}$，即$\ln(\cos\alpha)^{\sin\alpha}<\ln(\sin\alpha)^{\cos\alpha}$，故$(\cos\alpha)^{\sin\alpha}<(\sin\alpha)^{\cos\alpha}$，C 对；

对于 D 选项，因为$(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}\right)=2+\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}>2+2\sqrt{\tan\alpha\cdot\frac{1}{\tan\alpha}}=4$，

所以，$\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}>\frac{4}{\sin\alpha+\cos\alpha}$，D 错.

故选：ABC.

11. 给定函数$f(x)=x+\frac{1}{x}$，$g(x)=x-\frac{1}{x}$. 分别用$m(x)$、$M(x)$表示$f(x)$、$g(x)$中的最小者、最大者，记为$m(x)=\min\{f(x),g(x)\}$，$M(x)=\max\{f(x),g(x)\}$. 下列说法正确的是（   ）

A. $M(-x)+m(x)=0$

B. 当直线$y=t$与曲线$M(x)$有三个不同交点时，$t\geq1$

C. 当$x_0>0$时，曲线$m(x)$在点$(x_0,m(x_0))$处的切线与曲线$M(x)$有且仅有一个交点

D. 函数$H(x)=M(x)-m(x)$的值域为$(0,+\infty)$

【答案】ACD

【解析】

【分析】求出函数$m(x)$、$M(x)$的解析式，可判断 A 选项；数形结合可判断 B 选项；求出切线方程，将切线方程与函数$M(x)$的解析式联立，求出交点个数，可判断 C 选项；化简函数$H(x)$的解析式，并求其值域，可判断 D 选项.

【详解】函数$f(x)$、$g(x)$的定义域均为$\{x|x\neq0\}$，且$f(x)-g(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{x}$，

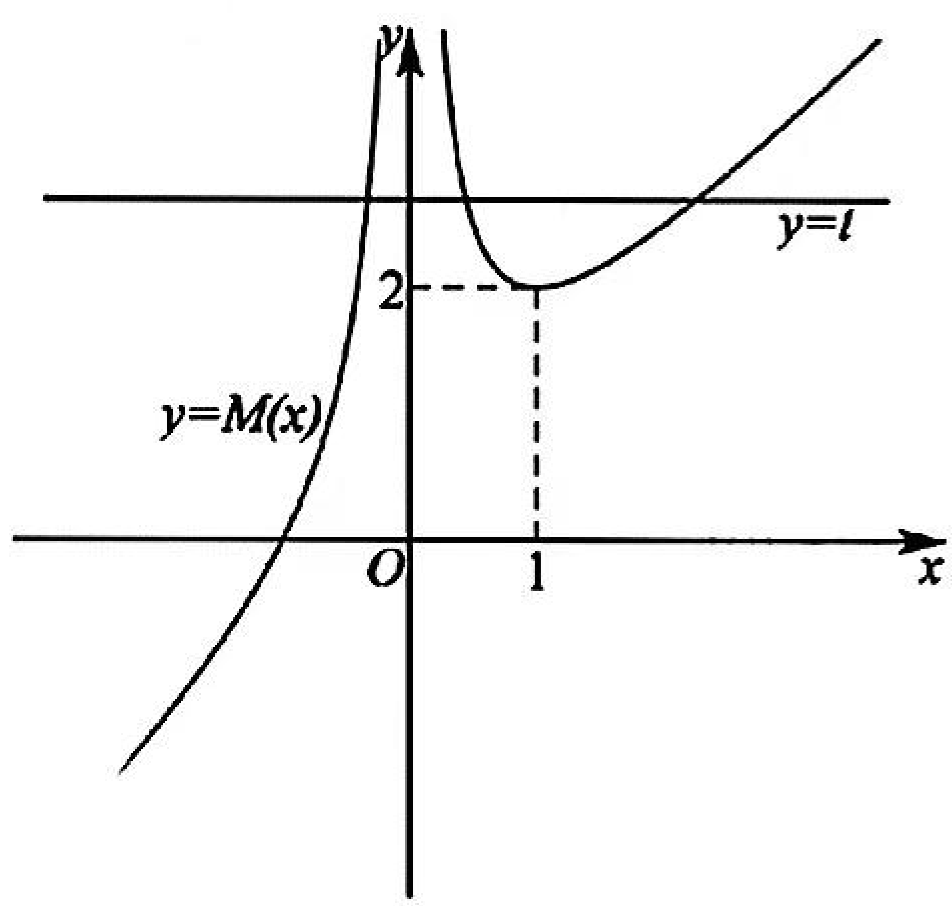
所以，$m(x)=\min\{f(x),g(x)\}=\begin{cases}x+\dfrac{1}{x},x<0\\ x-\dfrac{1}{x},x>0\end{cases}$

$M(x)=\max\{f(x),g(x)\}=\begin{cases}x-\dfrac{1}{x},x<0\\ x+\dfrac{1}{x},x>0\end{cases}$

对于 A 选项，当$x<0$时，$-x>0$，则$M(-x)=-x-\dfrac{1}{x}$，此时，$M(-x)+m(x)=0$，

当$x>0$时，$-x<0$，则$M(-x)=-x+\dfrac{1}{x}$，此时，$M(-x)+m(x)=0$，A 对；

对于 B 选项，作出函数$M(x)$的图象如下图所示：



由图可知，当$t>2$时，直线$y=t$与函数$y=M(x)$的图象有三个交点，B 错；

对于 C 选项，当$x>0$时，$m(x)=x-\dfrac{1}{x}$，则$m'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}$，

因为$x_0>0$，则$m'(x_0)=1+\dfrac{1}{x_0^2}$，

所以，曲线$m(x)$在点$(x_0,m(x_0))$处的切线方程为$y-\left(x_0-\dfrac{1}{x_0}\right)=\left(1+\dfrac{1}{x_0^2}\right)(x-x_0)$，

即$y=\left(1+\dfrac{1}{x_0^2}\right)x-\dfrac{2}{x_0}$，

当$x<0$时，由$\left(1+\dfrac{1}{x_0^2}\right)x-\dfrac{2}{x_0}=M(x)=x-\dfrac{1}{x}$，

整理可得$\left(x-x_0\right)^2=0$，可得$x=x_0$（舍去），

当$x>0$时，由$\left(1+\frac{1}{x_0^2}\right)x-\frac{2}{x_0}=M\left(x\right)=x+\frac{1}{x}$可得$x^2-2x_0x-x_0^2=0$，

解得$x=\left(1+\sqrt{2}\right)x_0$或$x=\left(1-\sqrt{2}\right)x_0$（舍去），

综上所述，当$x_0>0$时，曲线$m\left(x\right)$在点$\left(x_0,m\left(x_0\right)\right)$处的切线与曲线$M\left(x\right)$有且仅有一个交点，C对；

对于D选项，当$x<0$时，$H\left(x\right)=M\left(x\right)-m\left(x\right)=\left(x-\frac{1}{x}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)=-\frac{2}{x}\in\left(0,+\infty\right)$，

当$x>0$时，$H\left(x\right)=M\left(x\right)-m\left(x\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x-\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{x}\in\left(0,+\infty\right)$.

综上所述，函数$H\left(x\right)=M\left(x\right)-m\left(x\right)$的值域为$\left(0,+\infty\right)$，D对.

故选：ACD.

【点睛】思路点睛：已知函数的零点或方程的根的情况，求解参数的取值范围问题的本质都是研究函数的零点问题，求解此类问题的一般步骤：

（1）转化，即通过构造函数，把问题转化成所构造函数的零点问题；

（2）列式，即根据函数的零点存在定理或结合函数的图象列出关系式；

（3）得解，即由列出的式子求出参数的取值范围.

三、填空题：本大题共3小题，每小题5分，共15分.

12. 在$\left(\frac{1}{x}-2x\right)^6$的展开式中，常数项为__________.

【答案】-160

【解析】

【分析】先求出通项，然后令x的指数为零即可.

【详解】解：由题意得：$T_{k+1}=C_6^k\left(\frac{1}{x}\right)^{6-k}(-2x)^k=(-2)^kC_6^kx^{2k-6}$，

令$2k-6=0$得$k=3$，

故常数项为$T_4=(-2)^3C_6^3=-160$.

故答案为：-160.

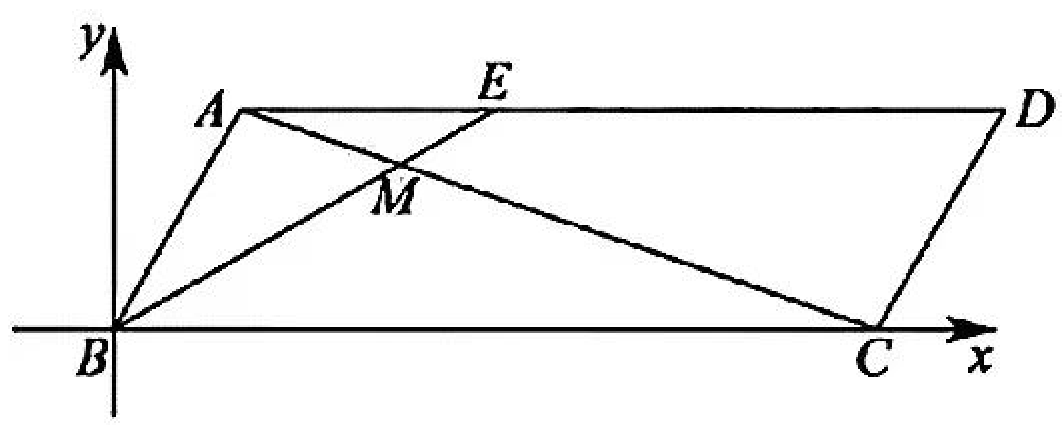
13. 在平行四边形$ABCD$中，已知$AB=2$，$BC=6$，$\angle ABC=60°$，点E在边AD上，$DE=2AE$，BE与AC相交于点M，则$\angle EMC$的余弦值为______.

【答案】$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

【解析】

【分析】以点B为坐标原点，BC所在直线为x轴建立平面直角坐标系，利用平面向量数量积的坐标运算可得出$\cos\angle EMC=\cos\left\langle\overrightarrow{BE},\overrightarrow{AC}\right\rangle$，即可得解.

【详解】以点B为坐标原点，BC所在直线为x轴建立如下图所示的平面直角坐标系，



在平行四边形$ABCD$中，已知$AB=2$，$BC=6$，$\angle ABC=60^\circ$，点E在边AD上，$DE=2AE$，

则$B(0,0)$、$A\left(1,\sqrt{3}\right)$、$C(6,0)$、$E\left(3,\sqrt{3}\right)$，则$\overrightarrow{BE}=\left(3,\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{AC}=\left(5,-\sqrt{3}\right)$，

所以，$\cos\angle EMC=\cos\left\langle\overrightarrow{BE},\overrightarrow{AC}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{BE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{15-3}{2\sqrt{3}\times2\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

故答案为：$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

14. 已知函数$f\left(x\right)=m\left(\dfrac{1}{4}\right)^{|x|}+n$（$m,n\in\mathbf{R}$，且$m\neq0$）的图象无限接近直线$y=-4$但又不与该直线相交，且$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，请写出一个满足条件的$f\left(x\right)$的解析式______.

【答案】$f\left(x\right)=-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{|x|}-4$（答案不唯一，满足$m<0$且$n=-4$均可）

【解析】

【分析】根据复合函数单调性结合指数函数单调性分析可知$m<0$，再结合指数函数值域可得$n=-4$，即可得结果.

【详解】当$x>0$时，$y=|x|=x$在$(0,+\infty)$上单调递增，

当$x<0$时，$y=|x|=-x$在$\left(-\infty,0\right)$上单调递减，

且$y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x}$在$R$上单调递减，

可知$y=\left(\frac{1}{4}\right)^{|x|}$在$(0,+\infty)$上单调递减，在$\left(-\infty,0\right)$上单调递增，

则$0<\left(\frac{1}{4}\right)^{|x|}\le\left(\frac{1}{4}\right)^{0}=1$，

若$f\left(x\right)$在$(0,+\infty)$上单调递增，则$m<0$，

可得$m+n\le m\left(\frac{1}{4}\right)^{|x|}+n<n$，

若函数$f\left(x\right)$图象无限接近直线$y=-4$但又不与该直线相交，可知$n=-4$，

综上所述：$m<0$且$n=-4$.

例如$m=-1$，可得$f\left(x\right)=-\left(\frac{1}{4}\right)^{|x|}-4$.

故答案为：$f\left(x\right)=-\left(\frac{1}{4}\right)^{|x|}-4$（答案不唯一，满足$m<0$且$n=-4$均可）.

四、解答题：本大题共5小题，共77分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

15. 在$\triangle ABC$中，a，b，c分别为内角A,B,C所对的边，且满足$a\cos C+c\cos A=2b\cos B$.

（1）求B；

（2）若$b=2\sqrt{2}$，求$\triangle ABC$周长的最大值.

【答案】（1）$B=\frac{\pi}{3}$

（2）$6\sqrt{2}$

【解析】

【分析】（1）根据题意利用正弦定理边化角，再结合三角恒等变换运算求解即可；

（2）利用余弦定理可得$ac=\frac{\left(a+c\right)^2-8}{3}$，再结合不等式$ac\le\frac{\left(a+c\right)^2}{4}$可得$a+c\le4\sqrt{2}$，即可得结果.

【小问1详解】

因为$a\cos C+c\cos A=2b\cos B$，

由正弦定理可得$\sin A\cos C+\sin C\cos A=2\sin B\cos B$，

且$\sin A\cos C+\sin C\cos A=\sin\left(A+C\right)=\sin B$，即$\sin B=2\sin B\cos B$，

又因为$B\in\left(0,\pi\right)$，则$\sin B\neq0$，

可得$1=2\cos B$，即$\cos B=\dfrac{1}{2}$，所以$B=\dfrac{\pi}{3}$.

【小问 2 详解】

由余弦定理可得：$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=(a+c)^2-2ac-2ac\cos B$，

即$8=(a+c)^2-2ac-ac=(a+c)^2-3ac$，可得$ac=\dfrac{(a+c)^2-8}{3}$，

又因为$ac=\dfrac{(a+c)^2-8}{3}\le\dfrac{(a+c)^2}{4}$，可得$(a+c)^2\le 32$，即$a+c\le 4\sqrt{2}$，

当且仅当$a=c=2\sqrt{2}$时，等号成立，

所以$\vee ABC$周长的最大值为$4\sqrt{2}+2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$.

16. 已知数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$满足$a_1=1$，$b_1=1$，$a_1+\dfrac{a_2}{2}+\cdots+\dfrac{a_m}{m}=m$，$b_n-b_k=\dfrac{1}{2}(n-k)$，其中$m$、$n$、$k\in\mathbf{N}^*$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式;

（2）记$c_n=\dfrac{1}{a_nb_n}$，求数列$\{c_n\}$的前n项和S_n.

【答案】(1) $a_n=n$

（2）$S_n=\dfrac{2n}{n+1}$

【解析】

【分析】(1)分析可得对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，$a_1+\dfrac{a_2}{2}+\cdots+\dfrac{a_n}{n}=n$，利用前$n$项和与通项的关系可求得数列$\{a_n\}$的通项公式;

（2）由题意得出$b_n-b_1=\dfrac{1}{2}(n-1)$，可求得数列$\{b_n\}$的通项公式，进而可求得数列$\{c_n\}$的通项公式，利用裂项求和法可求得$S_n$.

【小问 1 详解】

由题意可知，对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，$a_1+\dfrac{a_2}{2}+\cdots+\dfrac{a_n}{n}=n$，

当$n\ge 2$时，由$a_1+\dfrac{a_2}{2}+\cdots+\dfrac{a_{n-1}}{n-1}+\dfrac{a_n}{n}=n$，可得$a_1+\dfrac{a_2}{2}+\cdots+\dfrac{a_{n-1}}{n-1}=n-1$，

上述两个等式作差可得$\dfrac{a_n}{n}=1$，可得$a_n=n$，

$a_1=1$ 也满足 $a_n=n$，故对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，$a_n=n$.

【小问 2 详解】

由题意可知，$b_n-b_1=\frac{1}{2}(n-1)$，所以，$b_n=\frac{n-1}{2}+1=\frac{n+1}{2}$.

所以，$c_n=\frac{1}{a_nb_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,

所以，$S_n=2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$.

17. 已知函数 $f(x)=a(x+a)-\ln(x+1)$，$a\in\mathbf{R}$.

（1）讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

（2）若 $f(x)>1$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

【答案】（1）答案见详解

（2）$(1,+\infty)$

【解析】

【分析】（1）求导，分 $a\le0$ 和 $a>0$ 两种情况，结合导数的符号判断原函数单调性；

（2）由题意可得：$f(0)=a^2>1$，分 $a\le0$ 和 $a>0$ 两种情况，结合（1）中单调性分析求解即可.

【小问 1 详解】

由题意可知：$f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，且 $f'(x)=a-\frac{1}{x+1}=\frac{ax+a-1}{x+1}$，

若 $a\le0$，则 $f'(x)<0$，可知 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 内单调递减；

若 $a>0$，令 $f'(x)<0$，解得 $-1<x<\frac{1}{a}-1$；令 $f'(x)>0$，解得 $x>\frac{1}{a}-1$；

可知 $f(x)$ 在 $\left(-1,\frac{1}{a}-1\right)$ 内单调递减，在 $\left(\frac{1}{a}-1,+\infty\right)$ 内单调递增；

综上所述：若 $a\le0$，$f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 内单调递减；

若 $a>0$，$f(x)$ 在 $\left(-1,\frac{1}{a}-1\right)$ 内单调递减，在 $\left(\frac{1}{a}-1,+\infty\right)$ 内单调递增.

【小问 2 详解】

因为 $f(x)>1$ 恒成立，则 $f(0)=a^2>1$，

若$a\le 0$，由（1）可知：$f(x)$在$(-1,+\infty)$内单调递减，

且当x趋近于$+\infty$时，$f(x)$趋近于$-\infty$，不合题意；

若$a>0$，由$a^2>1$可得$a>1$，

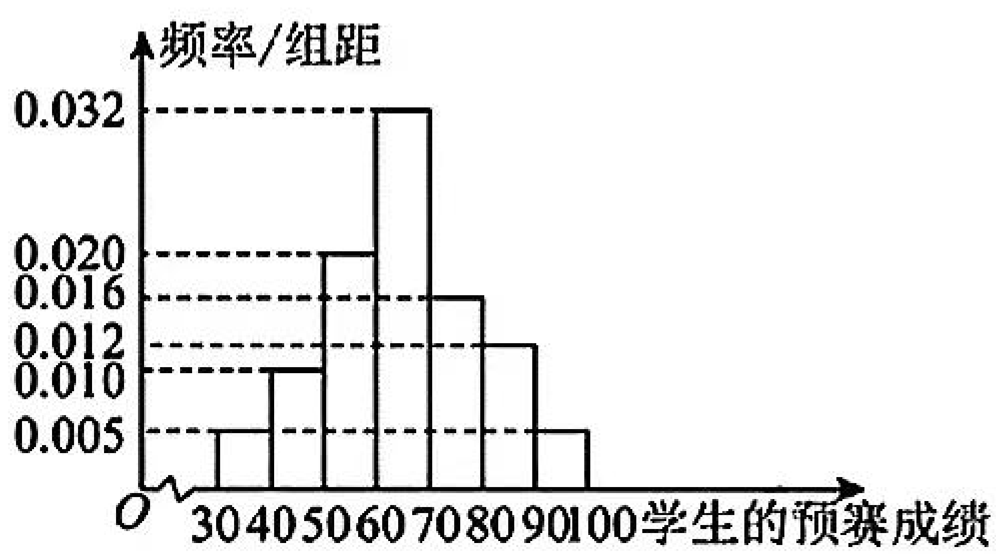
由（1）可知：$f(x)$在$\left(-1,\frac{1}{a}-1\right)$内单调递减，在$\left(\frac{1}{a}-1,+\infty\right)$内单调递增，

则$f\left(\frac{1}{a}-1\right)=a\left(\frac{1}{a}-1+a\right)-\ln\frac{1}{a}=a(a-1)+\ln a+1$，

若$a>1$，则$a(a-1)>0,\ln a>0$，可得$f\left(\frac{1}{a}-1\right)>1$，符合题意；

综上所述：实数a的取值范围为$(1,+\infty)$.

18. 某市为全面提高青少年健康素养水平，举办了一次“健康素养知识竞赛”，分预赛和复赛两个环节，预赛成绩采用百分制，排名前三百名的学生参加复赛. 已知共有10000名学生参加了预赛，现从参加预赛的全体学生中随机地抽取100人的预赛成绩作为样本，得到如下频率分布直方图：



（1）规定预赛成绩不低于80分为优良，若从上述样本中预赛成绩不低于70分的学生中随机地抽取2人，求至少有1人预赛成绩优良的概率；

（2）由频率分布直方图，可认为该市全体参加预赛学生的预赛成绩Z近似服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，其中μ可近似为样本中的100名学生预赛成绩的平均值（同一组数据用该组区间的中点值代替），且$\sigma^2=214$，已知小明的预赛成绩为95分，利用该正态分布，估计小明是否有资格参加复赛？

（3）复赛规则如下：①复赛题目由A、B两类问题组成，答对A类问题得30分，不答或答错得0分；答对B类问题得70分，不答或答错得0分；②A、B两类问题的答题顺序可由参赛学生选择，但只有在答对第一类问题的情况下，才有资格答第二类问题. 已知参加复赛的学生甲答对A类问题的概率为0.8，答对B类问题的概率为0.6，答对每类问题相互独立，且与答题顺序无关. 为使累计得分的期望最大，学生甲应选择先回答哪类问题？并说明理由.

附：若$Z\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$P(\mu-\sigma<Z<\mu+\sigma)\approx 0.6827$，$P(\mu-2\sigma<Z<\mu+2\sigma)\approx 0.9545$，

$P(\mu-3\sigma<Z<\mu+3\sigma)\approx 0.9973$；$\sqrt{214}\approx 15$.

【答案】(1) $\dfrac{17}{22}$

（2）有，理由见解析　　（3）先答 A 类问题，理由见解析

【解析】

【分析】(1) 计算出预赛成绩不低于 80 分的人数和预赛成绩不低于 70 分的学生人数，利用组合计数原理结合古典概型、对立事件的概率公式可求得所求事件的概率；

（2）计算出 μ 、σ 的值，可得出 $95=\mu+2\sigma$，计算出 $P(Z\geq 95)$ 的值，与 0.03 比大小，可得出结论；

（3）计算出学生甲先回答 A 类问题、先回答 B 类问题得分的期望值，比较大小后可得出结论.

【小问 1 详解】

由题意可知，抽取的100人中，预赛成绩不低于 80 分的人数为 $100\times 10\times(0.012+0.005)=17$，

预赛成绩不低于 70 分的学生人数为 $17+100\times 10\times 0.016=33$，

因此，从上述样本中预赛成绩不低于 70 分的学生中随机地抽取 2 人，

至少有1人预赛成绩优良的概率为 $1-\dfrac{C_{16}^{2}}{C_{33}^{2}}=\dfrac{17}{22}$.

【小问 2 详解】

由频率分布直方图可知，

$\mu=35\times 0.05+45\times 0.1+55\times 0.2+65\times 0.32+75\times 0.16+85\times 0.12+95\times 0.05=65$，

$\sigma=\sqrt{214}\approx 15$，$95=\mu+2\sigma$，

$$P(Z\geq 95)=P(Z\geq \mu+2\sigma)=\frac{1-P(\mu-2\sigma<Z<\mu+2\sigma)}{2}=0.02275<\frac{300}{10000}=0.03,$$

所以，小明有资格参加复赛.

【小问 3 详解】

若学生甲先答 A 类问题，设他的得分为随机变量 X，则 X 的可能取值有 0 、30 、100，

$P(X=0)=0.2$，$P(X=30)=0.8\times 0.4=0.32$，$P(X=100)=0.8\times 0.6=0.48$，

所以，随机变量 X 的分布列如下表所示：

X	0	30	100
P	0.2	0.32	0.48

则$E(X)=0\times 0.2+30\times 0.32+100\times 0.48=57.6$，

若学生甲先答B类问题，设该同学的得分为随机变量Y，则Y的可能取值有0、70、100，

$P(Y=0)=0.4$，$P(Y=70)=0.6\times 0.2=0.12$，$P(Y=100)=0.6\times 0.8=0.48$，

所以，随机变量Y的分布列如下表所示：

Y	0	70	100
P	0.4	0.12	0.48

则$E(Y)=0\times 0.4+70\times 0.12+100\times 0.48=56.4$，

所以，$E(X)>E(Y)$，因此，学生甲应先回答A类问题.

19. 已知函数$f(x)=\ln x+1$，取$a_1>0$；过点$A_1(a_1,f(a_1))$作曲线$f(x)$的切线，该切线与y轴的交点记作$(0,a_2)$．若$a_2>0$，则过点$A_2(a_2,f(a_2))$作曲线$f(x)$的切线，该切线与y轴的交点记作$(0,a_3)$．以此类推得$a_4,a_5,\cdots$，直至$a_n\le 0(n\in \mathbf{N}^*)$停止，由这些数构成数列$\{a_n\}$.

（1）若正整数$n\ge 2$，证明：$a_n=\ln a_{n-1}$；

（2）若正整数$n\ge 2$，证明：$a_n\le a_1-n+1$；

（3）若正整数$n\ge 3$，是否存在n使得$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$依次成等差数列？若存在，求出n的所有取值；若不存在，请说明理由.

【答案】（1）证明见详解

（2）证明见详解　　（3）存在，$n=3$

【解析】

【分析】（1）求导，根据导数的几何意义求切线方程，进而可得结果；

（2）构建$g(x)=x-\ln x-1,x>0$，利用导数可证$\ln x-x\le -1$，即可得$a_n-a_{n-1}\le -1$，结合累加法分析证明；

（3）由题意讨论当$n=3$时，结合等差数列性质以及构造函数，利用导数得出单调性以及零点存在定理即可说明，当$n\ge 4$时，利用零点存在定理得出唯一性，得出矛盾即可推翻，由此即可得解.

【小问1详解】

因为$f(x)=\ln x+1$，则$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，

若$n\ge 2$，曲线$f(x)$在点$A_{n-1}(a_{n-1},1+\ln a_{n-1})$处的切线斜率为$\dfrac{1}{a_{n-1}}$，

则切线方程为$y-(1+\ln a_{n-1})=\dfrac{1}{a_{n-1}}(x-a_{n-1})$，

令$x=0$，可得$y-(1+\ln a_{n-1})=\dfrac{1}{a_{n-1}}(-a_{n-1})=-1$，解得$y=\ln a_{n-1}$，

所以$a_n=\ln a_{n-1}$.

【小问 2 详解】

构建$g(x)=x-\ln x-1,x>0$，则$g'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，

当$0<x<1$时，$g'(x)>0$；当$x>1$时，$g'(x)<0$；

可知$g(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，

则$g(x)\ge g(1)=0$，可得$\ln x-x\le -1$，当且仅当$x=1$时，等号成立，

当$n\ge 2$时，则$a_n-a_{n-1}=\ln a_{n-1}-a_{n-1}\le -1$，

可得$a_{n-1}-a_{n-2}\le -1,\cdots,a_3-a_2\le -1,a_2-a_1\le -1$，

累加可得$a_n-a_1\le -(n-1)$，所以$a_n\le a_1-n+1$.

【小问 3 详解】

若存在n使得$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$依次成等差数列，

当$n=3$时，则a_1,a_2,a_3依次成等差数列，可得$a_1+a_3=2a_2$，

又因为$a_2=\ln a_1,a_3=\ln a_2$，则$a_1=e^{a_2}$，

可得$e^{a_2}+\ln a_2=2a_2$，即$e^{a_2}+\ln a_2-2a_2=0$，

构建$h(x)=e^x+\ln x-2x,x>0$，则$h'(x)=e^x+\dfrac{1}{x}-2$，

由（2）可知：$x-\ln x-1\ge 0$，即$x\ge \ln x+1$，

可得$e^x\ge \ln e^x+1=x+1$，当且仅当$x=0$时，等号成立，

则$h'(x)=e^x+\dfrac{1}{x}-2\ge x+1+\dfrac{1}{x}-2=x+\dfrac{1}{x}-1$，

且$x+\dfrac{1}{x}-1\ge 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}-1=1$，当且仅当$x=1$时，等号成立，

可得$h'(x)>1>0$，

可知$h(x)$在$(0,+\infty)$内单调递增，且$h\left(\mathrm{e}^{-2}\right)=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-2}}+\ln\mathrm{e}^{-2}-2\mathrm{e}^{-2}=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-2}}-2-2\mathrm{e}^{-2}\left\langle 0,h(1)=\mathrm{e}-2\right\rangle 0$，

可知$h(x)$在$(0,+\infty)$内有且仅有一个零点，

当$n\geq 4$时，则a_{n-2},a_{n-1},a_n依次成等差数列，可得$a_{n-2}+a_n=2a_{n-1}$，

又因为$a_{n-1}=\ln a_{n-2},a_n=\ln a_{n-1}$，则$a_{n-2}=\mathrm{e}^{a_{n-1}}$，

可得$\mathrm{e}^{a_{n-1}}+\ln a_{n-1}=2a_{n-1}$，即$\mathrm{e}^{a_{n-1}}+\ln a_{n-1}-2a_{n-1}=0$，

根据$h(x)$零点的唯一性可知：$a_2=a_{n-1}$，

由（2）可知：$a_n-a_{n-1}\leq -1<0,n\geq 2$，可知$\{a_n\}$为递减数列，

所以$a_2=a_{n-1}$不成立，即$n\geq 4$时，不存在n使得$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$依次成等差数列；

综上所述：存在n使得$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$依次成等差数列，此时$n=3$.

【点睛】方法点睛：利用导数证明不等式的基本步骤

（1）作差或变形；

（2）构造新的函数$h(x)$；

（3）利用导数研究$h(x)$的单调性或最值；

（4）根据单调性及最值，得到所证不等式；

特别地：当作差或变形构造的新函数不能利用导数求解时，一般转化为分别求左、右两端两个函数的最值问题.