四川省高三年级第一次联合诊断性考试
数学参考答案及评分标准

评分说明：

1．本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分参考制定相应的评分细则。

2．对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应得分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

3．解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4．只给整数分。

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8
D	A	B	B	D	C	B	C

二、选择题：本大题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得6分，选对但不全的得部分分，有选错的得0分。

9	10	11
AC	ABD	BCD

三、填空题：本大题共3小题，每小题5分，共15分。

12．$\dfrac{\sqrt{2}}{10}$　　13．20　　14．3.3

四、解答题：本大题共5小题，共77分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15．【命题意图】本小题在数学文化背景下，设置数学课程学习情境、探索创新情境，设计数列问题，体现基础性和创新性，主要考查数列通项、前n项和的求法、等差数列与等比数列的综合应用等基础知识；考查特殊与一般、化归与转化等思想方法，以及探索性、创新性的思维品质；考查数学抽象、数学运算和逻辑推理等核心素养。

【解析】

（1）由题意可知，

$a_1=1$，$a_2=3=1+2=a_1+2$，$a_3=6=1+2+3=a_2+3$，……

$a_n=a_{n-1}+n$，……2分

数列$\{a_n\}$的一个递推关系为$a_{n+1}=a_n+(n+1)$，$n\in\mathbf{N}^*$，

当$n\geqslant 2$时，利用累加法可得，

$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$

$=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，……5分

将$n=1$代入得$a_1=1$，满足$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，$n\in\mathbf{N}^*$；……7分

注：学生若根据示意图，得到$a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=6$……进而得到$a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$（只给5分）

（2）由（1）知，$b_n=\dfrac{2}{n(n+1)}=2(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$，……9分

则$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$=2[(1-\dfrac{1}{2})+(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3})+\cdots+(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})]$

$=2(1-\dfrac{1}{n+1})$

$=\dfrac{2n}{n+1}$．……13分

16.【命题意图】本小题设置生活实践情境，设计统计与概率等问题，主要考查条件概率与全概率公式、列联表与独立性检验等基本知识；考查统计基本思想以及抽象概括、数据处理等能力和应用意识；考查数学运算、数学建模、数据分析等数学核心素养。

【解析】

(1)提出零假设 H_0：该校学生对课外活动的满意情况与性别因素无关联，……1 分

根据表中数据，得到

$\chi^2=\dfrac{350\times(150\times50-50\times100)^2}{200\times150\times250\times100}=\dfrac{35}{12}\approx2.917<3.841=x_{0.05}$，……5 分

所以根据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验，没有充分证据推断 H_0 不成立，即认为该校学生对课外活动的满意情况与性别因素无关联；……7 分

(2)方法 1 依题意得，

$P(B|A)=\dfrac{n(AB)}{n(A)}=\dfrac{150}{250}=\dfrac{3}{5}$，……9 分

$P(B|\bar{A})=\dfrac{n(\bar{A}B)}{n(\bar{A})}=\dfrac{50}{100}=\dfrac{1}{2}$；……11 分

方法 2 依题意得，

$P(A)=\dfrac{250}{350}=\dfrac{5}{7}$，$P(\bar{A})=1-P(A)=\dfrac{2}{7}$，……9 分

$P(AB)=\dfrac{150}{350}=\dfrac{3}{7}$，$P(\bar{A}B)=\dfrac{50}{350}=\dfrac{1}{7}$，……10 分

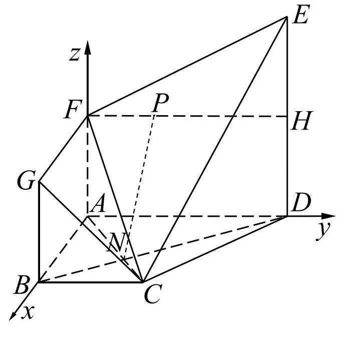
所以 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{\frac{3}{7}}{\frac{5}{7}}=\dfrac{3}{5}$，$P(B|\bar{A})=\dfrac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}=\dfrac{\frac{1}{7}}{\frac{2}{7}}=\dfrac{1}{2}$，……11 分

则 $P(B|A)>P(B|\bar{A})$，……13 分

意义：男生对课外活动满意的概率比女生对课外活动满意的概率大；或者男生对课外活动满意的人数比女生对课外活动满意的人数多等等. ……15 分

17.【命题意图】本小题设置课程学习情境，设计立体几何问题，主要考查空间线面平行、线面垂直、空间角等基础知识；考查空间想象能力、抽象概括能力、推理论证能力、运算求解能力；考查数学抽象素养、逻辑推理素养、直观想象素养和数学运算素养。

【解析】



(1)方法 1：依题意可知，直线 AB，AD，AF 两两垂直，以点 A 为坐标原点，直线 AB，AD，AF 分别为 x，y，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系. 依题意得 $C(1,1,0)$，$E(0,2,2)$，$F(0,0,1)$，$P(0,\dfrac{2}{3},1)$，……2 分

因为 $AD\parallel BC$，

所以 $\dfrac{AN}{NC}=\dfrac{AD}{BC}=2$，

所以 $\overrightarrow{AN}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}=(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},0)$，又 $\overrightarrow{AP}=(0,\dfrac{2}{3},1)$，

所以 $\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AN}=(-\dfrac{2}{3},0,1)$，……5 分

又 $\overrightarrow{FE}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{FC}=(1,1,-1)$，

从而得 $\overrightarrow{NP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{FE}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{FC}$，

所以向量 $\overrightarrow{NP}$，$\overrightarrow{FE}$，$\overrightarrow{FC}$ 共面，……7 分

又 $EF\subset$ 平面 EFC，$FC\subset$ 平面 EFC，$NP\not\subset$ 平面 EFC，

所以 $NP\parallel$ 平面 EFC；……8 分

方法 2：如图，在 FE，CF 上取点 M，Q，且满足 $FM=\frac{1}{3}FE$，$CQ=\frac{1}{3}CF$，连接 MP，QM，QN，

因为 $FP=\frac{1}{3}FH$，$HE=\frac{1}{2}DE=1$，

有 $\frac{FP}{FH}=\frac{FM}{FE}=\frac{1}{3}$，

所以 $PM\parallel HE$，且 $PM=\frac{1}{3}HE=\frac{1}{3}$，…………………………………………………………3 分

又因为 $AD\parallel BC$，$AD=2$，$BC=1$，

所以 $\frac{AN}{NC}=\frac{AD}{BC}=2$，

有 $\frac{CN}{CA}=\frac{CQ}{CF}=\frac{1}{3}$，

所以 $NQ\parallel AF$，且 $NQ=\frac{1}{3}AF=\frac{1}{3}$，…………………………………………………………5 分

又 $DE\parallel AF$，

所以 $NQ\parallel PM$，且 $NQ=PM=\frac{1}{3}$，

所以四边形 $MPNQ$ 为平行四边形，

所以 $QM\parallel NP$，

又 $QM\subset$ 平面 EFC，$NP\not\subset$ 平面 EFC，

所以 $NP\parallel$ 平面 EFC；………………………………………………………………………8 分

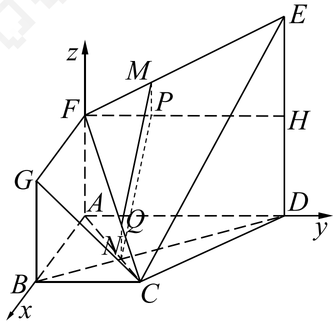
（2）由（1）方法 1 可知 $G(1,0,1)$，$F(0,0,1)$，$C(1,1,0)$，$E(0,2,2)$，……………9 分

设平面 GFC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{FG}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{FC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1=0,\\ x_1+y_1-z_1=0,\end{cases}$

取 $z_1=1$ 得平面 GFC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,1,1)$，

…………………………………………………………………………11 分



设平面 EFC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2y_2+z_2=0,\\ x_2+y_2-z_2=0.\end{cases}$

取 $y_2=1$ 得平面 EFC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(-3,1,-2)$，

………………………………………………………………………………………………13 分

则 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{(0,1,1)\cdot(-3,1,-2)}{\sqrt{1^2+1^2}\times\sqrt{(-3)^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{14}}=-\frac{\sqrt{7}}{14}$，

由图知二面角 $E-FC-G$ 为钝角，

故二面角 $E-FC-G$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{7}}{14}$． …………………………………………………15 分

18．【考查意图】本小题设置数学学习情境、探索创新情境，设计直线与抛物线相关的开放性问题，主要考查直线的方程、抛物线的方程及基本性质，直线与抛物线的位置关系等基础知识；考查函数与方程、化归与转化及数形结合等思想方法，考查直观想象、数学运算及逻辑推理等数学核心素养。

【解析】

（1）由已知，点 F 的坐标为 $(1,0)$，且可设直线 AB 的方程为 $x=my+1$，

联立方程组 $\begin{cases}x=my+1,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 消去 x，得 $y^2-4my-4=0$（*），……………………………2 分

因为 $\Delta=(-4m)^2-4\times1\times(-4)=16m^2+16>0$，

所以 y_1，y_2 为方程（*）的两个实根，且 $y_1y_2=-4$，

因为点 A，B 在抛物线 E 上，

所以 $x_1x_2=\frac{y_1^2}{4}\cdot\frac{y_2^2}{4}=\frac{(y_1y_2)^2}{16}=1$，为常数；…………………………………………5 分

(2)在题设条件下，直线 AB，CD 都不与坐标轴平行且 $m\neq 0$，由(1)可知

直线 l 的方程为：$x=-\frac{1}{m}y+1$，

①因为抛物线 E 的准线方程为 $x=-1$，代入 l 的方程可得点 P 的坐标为 $(-1,2m)$，

由(1)可知，$y_1y_2=-4$，$x_1x_2=1$，$y_1+y_2=4m$，$x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2=4m^2+2$，

因此，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(x_1+1,y_1-2m)\cdot(x_2+1,y_2-2m)$ ……………………7 分

$=x_1x_2+(x_1+x_2)+1+y_1y_2-2m(y_1+y_2)+4m^2$

$=1+4m^2+2+1-4-8m^2+4m^2=0$，……………………10 分

即 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的值为 0；

② $|FA||FC|+|FB||FD|$ 存在最小值，……………………11 分

设点 C，D 的坐标分别为 $C(x_3,y_3)$，$D(x_4,y_4)$，

因为点 A，B，C，D 均在抛物线 E 上，所以 $x_1=\frac{y_1^2}{4}$，$x_2=\frac{y_2^2}{4}$，$x_3=\frac{y_3^2}{4}$，$x_4=\frac{y_4^2}{4}$，

由 $AB\perp CD$，有 $(x_1-1,y_1)\cdot(x_3-1,y_3)=0$，即 $(\frac{y_1^2}{4}-1)(\frac{y_3^2}{4}-1)+y_1y_3=0$，

变形可得 $(y_1^2-4)(y_3^2-4)+16y_1y_3=0$，

则 $y_1^2y_3^2+16y_1y_3+16=4(y_1^2+y_3^2)$ (**)，

同理，$y_2^2y_4^2+16y_2y_4+16=4(y_2^2+y_4^2)$，……………………13 分

根据抛物线的定义可知，

$|FA|=x_1+1=\frac{y_1^2}{4}+1$，$|FB|=x_2+1=\frac{y_2^2}{4}+1$，

$|FC|=x_3+1=\frac{y_3^2}{4}+1$，$|FD|=x_4+1=\frac{y_4^2}{4}+1$，

所以 $|FA||FC|+|FB||FD|$

$=(\frac{y_1^2}{4}+1)(\frac{y_3^2}{4}+1)+(\frac{y_2^2}{4}+1)(\frac{y_4^2}{4}+1)$

$=\frac{(y_1^2+4)(y_3^2+4)}{16}+\frac{(y_2^2+4)(y_4^2+4)}{16}$

$=\frac{y_1^2y_3^2+4(y_1^2+y_3^2)+16}{16}+\frac{y_2^2y_4^2+4(y_2^2+y_4^2)+16}{16}$

$=\frac{y_1^2y_3^2+8y_1y_3+16}{8}+\frac{y_2^2y_4^2+8y_2y_4+16}{8}$

$=\frac{(y_1y_3+4)^2}{8}+\frac{(y_2y_4+4)^2}{8}$，……………………15 分

由(**)知，$y_1^2y_3^2+24y_1y_3+16=4(y_1+y_3)^2\geqslant 0$，

即 $(y_1y_3+12)^2\geqslant 128$，当且仅当 $y_1+y_3=0$ 时取“=”，

同理，$(y_2y_4+12)^2\geqslant 128$，当且仅当 $y_2+y_4=0$ 时取“=”，

由题设，$y_2y_4<y_1y_3<0$，

所以 $y_1y_3\geqslant -12+8\sqrt{2}$，$y_2y_4\leqslant -12-8\sqrt{2}$，

所以 $\frac{(y_1y_3+4)^2}{8}\geqslant\frac{(-12+8\sqrt{2}+4)^2}{8}=24-16\sqrt{2}$，

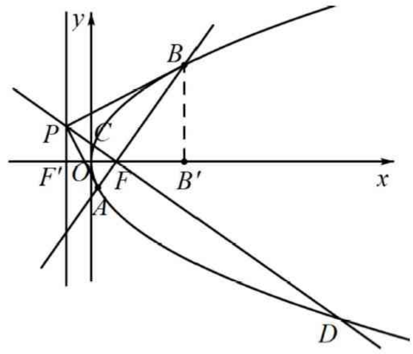
$\frac{(y_2y_4+4)^2}{8}\geqslant\frac{(-12-8\sqrt{2}+4)^2}{8}=24+16\sqrt{2}$，

由题意可知，$y_1+y_3=0$，$y_2+y_4=0$ 同时成立，

此时，$\frac{(y_1y_3+4)^2}{8}+\frac{(y_2y_4+4)^2}{8}$ 取得最小值 $24-16\sqrt{2}+24+16\sqrt{2}=48$，

故 $|FA||FC|+|FB||FD|$ 存在最小值，最小值为 48．……………………17 分

【另解】



$|FA||FC|+|FB||FD|$ 存在最小值，……………………………………11 分

假设直线 AB 的倾斜角为 α，根据题意可设 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，

如图，设点 B 在 x 轴上的射影为点 B'，

抛物线 E 的准线与 x 轴相交于点 F'，

根据抛物线的定义，由题设点 A，B，C，D 的位置可知

$|FB|=|F'B'|=|F'F|+|FB'|=2+|FB|\cos\alpha$，

所以，$|FB|=\dfrac{2}{1-\cos\alpha}$，

……………………………………………………………………………………………13 分

同理可得，$|FA|=\dfrac{2}{1+\cos\alpha}$，$|FC|=\dfrac{2}{1+\sin\alpha}$，$|FD|=\dfrac{2}{1-\sin\alpha}$，

所以 $|FA||FC|+|FB||FD|=\left(\dfrac{2}{1+\cos\alpha}\right)\left(\dfrac{2}{1+\sin\alpha}\right)+\left(\dfrac{2}{1-\cos\alpha}\right)\left(\dfrac{2}{1-\sin\alpha}\right)$

$=\dfrac{4}{1+\cos\alpha\sin\alpha+\cos\alpha+\sin\alpha}+\dfrac{4}{1+\cos\alpha\sin\alpha-\cos\alpha-\sin\alpha}$，

令 $\cos\alpha+\sin\alpha=t$，$t\in(1,\sqrt{2}]$，则

$|FA||FC|+|FB||FD|=\dfrac{4}{1+t+\dfrac{t^2-1}{2}}+\dfrac{4}{1-t+\dfrac{t^2-1}{2}}=\dfrac{16}{t^2+1+\dfrac{4}{t^2+1}-4}$，

……………………………………………………………………………………………15 分

由 $t\in(1,\sqrt{2}]$，可得 $t^2+1\in(2,3]$，

易知函数 $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$（$x\in(2,3]$）为增函数，

所以 $t^2+1+\dfrac{4}{t^2+1}-4\leqslant 3+\dfrac{4}{3}-4=\dfrac{1}{3}$，

上式中，当且仅当 $t^2+1=3$，即 $t=\sqrt{2}$ 时（此时 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$）等号成立，

所以，$|FA||FC|+|FB||FD|\geqslant 48$，

所以，$|FA||FC|+|FB||FD|$ 存在最小值 48，该最小值当且仅当 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 时取得.

……………………………………………………………………………………………17 分

19.【命题意图】本小题设置课程学习情境，设计函数与导数、不等式相关问题，主要考查函数的图象和性质、导数的应用、不等式证明等基础知识；考查函数与方程、数学结合等数学思想；考查化归与转化、抽象概括等数学学科能力；考查逻辑推理、直观想象、数学运算等核心素养。

【解析】

(1) 当 $a=-1$ 时，$f(x)=e^x+x^3+3x^2$，

令 $g(x)=f(x)-e^x$，即 $g(x)=x^3+3x^2$，则 $g'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$，……………2 分

当 $x<-2$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

当 $-2<x<0$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

当 $x>0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，……………………………………………4 分

所以，当 $x=-2$ 时，$g(x)$ 取得极大值 $g(-2)=4$，

当 $x=0$ 时，$g(x)$ 取得极小值 $g(0)=0$，………………………………………………5 分

(2) 令 $h(x)=f(x)-(x+1)=e^x-ax^3-3ax^2-x-1$，

则 $h'(x)=e^x-3ax^2-6ax-1$，且 $h'(0)=0$，$h(0)=0$，

设 $u(x)=h'(x)=e^x-3ax^2-6ax-1$，则 $u'(x)=e^x-6ax-6a$，

又令 $v(x)=u'(x)=e^x-6ax-6a$，则 $v'(x)=e^x-6a$，……………………………………7 分

①若 $v'(0)=1-6a\geqslant 0$，即 $a\leqslant\frac{1}{6}$ 时，

由于 $v'(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上为增函数，可知 $v'(x)\geqslant v'(0)\geqslant 0$，

则 $v(x)$ 即 $u'(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上为增函数，故 $u'(x)\geqslant u'(0)=1-6a\geqslant 0$，

所以 $u(x)$ 即 $h'(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上为增函数，

则 $h'(x)\geqslant h'(0)=0$，则 $h(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上为增函数，

所以 $h(x)\geqslant h(0)=0$，即 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant x+1$ 恒成立，

所以，当 $a\leqslant\frac{1}{6}$ 时，符合条件；……………………………………………………9 分

②若 $v'(0)=1-6a<0$，即 $a>\frac{1}{6}$ 时，

由于 $v'(x)=e^x-6a$ 为单调递增函数，且 $v'(\ln(1+6a))=1>0$，

所以 $\exists x_0\in(0,\ln(1+6a))$，$v'(x_0)=0$，

则 $0<x<x_0$ 时，$v'(x)<0$，

可知 $v(x)$ 即 $u'(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 上为减函数，则 $u'(x)\leqslant u'(0)=1-6a<0$，

故 $u(x)$ 即 $h'(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 上为减函数，则 $h'(x)\leqslant h'(0)=0$，

则 $h(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 上为减函数，

所以 $h(x)\leqslant h(0)=0$，不符合题意，

综上所述，当 $x\geqslant 0$，$f(x)\geqslant x+1$ 时，a 的取值范围为 $(-\infty,\frac{1}{6}]$；……………………11 分

(3)【证明】

欲证 $(1+\frac{1+1}{3+1})(1+\frac{3+1}{3^2+1})\cdots(1+\frac{3^{n-1}+1}{3^n+1})<\sqrt[3]{e^{n+1}}$，

只需证明 $\ln(1+\frac{1+1}{3+1})+\ln(1+\frac{3+1}{3^2+1})+\cdots+\ln(1+\frac{3^{n-1}+1}{3^n+1})<\frac{n+1}{3}$，………12 分

由(2)可知，当 $a=0$ 时，$f(x)\geqslant x+1$，即有 $e^x\geqslant x+1$，

进而得 $\ln(1+x)\leqslant x$，其中 $x>-1$，当且仅当 $x=0$ 时"="成立，

则 $\ln(1+\frac{1+1}{3+1})<\frac{1+1}{3+1}$，$\ln(1+\frac{3+1}{3^2+1})<\frac{3+1}{3^2+1}$，…，$\ln(1+\frac{3^{n-1}+1}{3^n+1})<\frac{3^{n-1}+1}{3^n+1}$，

……………………………………………………………………………………………14 分

所以 $\ln(1+\frac{1+1}{3+1})+\ln(1+\frac{3+1}{3^2+1})+\cdots+\ln(1+\frac{3^{n-1}+1}{3^n+1})$

$$<\frac{1+1}{3+1}+\frac{3+1}{3^2+1}+\cdots+\frac{3^{n-1}+1}{3^n+1}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{3+3}{3+1}+\frac{1}{3}\times\frac{3^2+3}{3^2+1}+\cdots+\frac{1}{3}\times\frac{3^n+3}{3^n+1}$$

$$=\frac{1}{3}[(1+\frac{2}{3+1})+(1+\frac{2}{3^2+1})+\cdots+(1+\frac{2}{3^n+1})]$$

$$<\frac{1}{3}[(1+\frac{2}{3})+(1+\frac{2}{3^2})+\cdots+(1+\frac{2}{3^n})]$$

$$=\frac{1}{3}[n+\frac{2\times\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3^n})}{1-\frac{1}{3}}]<\frac{n+1}{3},$$

所以 $(1+\frac{1+1}{3+1})(1+\frac{3+1}{3^2+1})\cdots(1+\frac{3^{n-1}+1}{3^n+1})<\sqrt[3]{e^{n+1}}$. ……………………………17 分

解析：

1.【命题意图】本小题设置课程学习情境，设计集合运算问题，主要考查一元一次不等式的解法，集合的交集运算等基础知识；考查运算求解能力；考查数学运算等数学核心素养。

【答案】D

【解析】由 $B=\{x|2x-1\geqslant 2-x\}=\{x|x\geqslant 1\}$，所以 $A\cap B=\{x|x\leqslant -1,或x\geqslant 2\}\cap\{x|x\geqslant 1\}=\{x|x\geqslant 2\}$.

2.【命题意图】本小题设置课程学习情境，设计复数的几何意义，不等式组的解法等基础知识；考查运算求解能力，数形结合思想；考查直观想象等数学核心素养。

【答案】A

【解析】复数 $z=(a-2)+(1+2a)\mathrm{i}$，其对应的点 $(a-2,1+2a)$ 在第二象限，则 $\begin{cases}a-2<0,\\1+2a>0,\end{cases}$

解得 $-\frac{1}{2}<a<2$.

3.【命题意图】本小题设置课程学习情境，设计充分条件与必要条件等问题，主要考查充分条件与必要条件、三角函数的图象和性质等基础知识；考查逻辑推理等数学能力；考查数学抽象、逻辑推理等数学核心素养。

【答案】B

【解析】由 $\sin x\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，得 $2k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{2\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，则 x 不一定满足 $\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$；反之，当 $\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$ 时，一定有 $\sin x\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故甲是乙的必要不充分条件.

4.【命题意图】本小题设置课程学习情境，设计平面向量问题，主要考查平面向量的几何意义与投影向量等基础知识；考查推理论证等数学能力；考查直观想象等数学核心素养。

【答案】B

【解析】依题意，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{b}|=2$，所以 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{2\sqrt{3}}{2}\times\frac{(-\sqrt{3},1)}{2}=(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$.

5.【命题意图】本小题设置生活实践情境，设计统计问题，考查概率、平均数等统计量的计算，样本估计总体等相关知识；考查统计概率思想；考查运算求解能力和应用能力；考查数据分析等数学核心素养。

【答案】D

【解析】由表可知，$15\%+5\%+5\%+m\%+10\%+15\%+4m\%=1$，解得 $m=10$，选项A错误；观看场次不超过3场的学生的比例为 $15\%+5\%+5\%+10\%=35\%$，选项B错误；观看场次不超过2场的学生的比例为 $15\%+5\%+5\%=25\%$，则观看场次不超过2场的学生约为 $2000\times 25\%=500$ 人，选项C错误；观看场次不低于4场的学生的比例为 $10\%+15\%+40\%=65\%$，则观看场次不低于4场的学生约为 $2000\times 65\%=1300$ 人，选项D正确.

6.【命题意图】本小题设置课程学习情境，设计解三角形问题，主要考查正弦定理、余弦定理，特殊角的三角函数等基础知识；考查运算求解能力，推理论证能力；考查数学运算素养、逻辑推理素养。

【答案】C

【解析】由 $\frac{a-c}{b+c}=\frac{\sin B}{\sin A+\sin C}$，根据正弦定理有 $\frac{a-c}{b+c}=\frac{\frac{b}{2R}}{\frac{a}{2R}+\frac{c}{2R}}=\frac{b}{a+c}$，所以 $a^2-c^2=b^2+bc$，有 $b^2+c^2-a^2=-bc$，根据余弦定理，有 $\cos A=-\frac{1}{2}$，由 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$.

7．【命题意图】本小题设计数学学习情境，设计双曲线的相关问题，考查双曲线的标准方程、离心率、渐近线及点到直线的距离等基础知识；考查化归与转化等数学思想；考查数学运算等数学核心素养。

【答案】B

【解析】由已知，$2a=2$，$\frac{c}{a}=\sqrt{5}$，所以 $a=1$，$c=\sqrt{5}$，则 $b=2$．设 $M(m,n)$ 为双曲线 C 上任意一点，则 $m^2-\frac{n^2}{4}=1$，即 $4m^2-n^2=4$．而双曲线 C 的渐近线为 $2x\pm y=0$，所以点 M 到两条渐近线的距离之积为 $\frac{|2m-n|}{\sqrt{5}}\times\frac{|2m+n|}{\sqrt{5}}=\frac{|4m^2-n^2|}{5}=\frac{4}{5}$．

8．【命题意图】本小题设置课程学习情境，设计函数性质与不等式等问题，主要考查指数式的运算、函数奇偶性、对称性、单调性等基础知识；考查逻辑推理等数学能力；考查数学抽象、逻辑推理等数学核心素养。

【答案】C

【解析】依题意，$f(x+1)=\frac{x(2^{x+1}+a)}{2^x+1}$，令 $g(x)=\frac{2^{x+1}+a}{2^x+1}$，由于 $f(x+1)$ 为偶函数，故只需 $g(x)$ 为奇函数，由 $g(0)=\frac{2+a}{2}=0$，得 $a=-2$，由此可以验证 $g(x)=\frac{2^{x+1}-2}{2^x+1}$ 为奇函数．又由 $f(x+1)$ 为偶函数，得 $f(-x+1)=f(x+1)$，故 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称．$f(x)=\frac{(2^x-2)(x-1)}{2^{x-1}+1}=(2-\frac{4}{2^{x-1}+1})\cdot(x-1)$，当 $x>1$ 时，$y=2-\frac{4}{2^{x-1}+1}$ 与 $y=x-1$ 单调递增且均大于 0，易知 $f(x)$ 单调递增（或由 $x>1$ 时，$f'(x)=\frac{4\ln2\times2^{x-1}(x-1)}{(2^{x-1}+1)^2}+\frac{2^x-2}{2^{x-1}+1}>0$，可知，当 $x>1$ 时，$f(x)$ 单调递增），则 $x<1$ 时，$f(x)$ 单调递减．原不等式 $f(2+am)<f(4)$ 即为 $f(2-2m)<f(4)$，等价于 $|2-2m-1|<3$，即 $|1-2m|<3$，解得 $-1<m<2$．

9．【命题意图】本小题设置课程学习情境，设计三角函数图象与性质问题，主要考查两角和的正弦公式，正弦型函数的周期、单调性，图象的对称性、图象平移变换等基础知识；考查运算求解能力，推理论证能力，抽象概括能力；考查数学运算、直观想象、逻辑推理等数学核心素养。

【答案】AC

【解析】由 $f(x)=\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=2\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6})$，所以最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$，选项 A 正确；当 $x\in(-\frac{11\pi}{6},\frac{\pi}{6})$ 时，$\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\in(-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4})$，此时 $f(x)$ 先减后增，选项 B 错误；$f(x)$ 的图象关于直线 $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 对称，当 $k=-1$ 时，$x=-\frac{4\pi}{3}$，选项 C 正确；$y=2\sin\frac{x}{2}$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到 $y=2\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12})$ 的图象，选项 D 错误．

10．【命题意图】本小题设置数学课程学习的综合情境，以椭圆和圆的关系设置问题，主要考查圆的方程、椭圆的标准方程及其性质等基础知识，考查数与形结合、函数与方程、化归与转化等数学思想；考查数学运算、逻辑推理等数学核心素养。

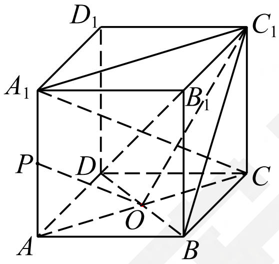
【答案】ABD

【解析】以椭圆 E 的长轴为直径的圆的半径为 $a=\sqrt{2}$，圆心为原点，其方程为 $x^2+y^2=2$，选项 A 正确；以 F_1F_2 为直径的圆的方程为 $x^2+y^2=1$，与椭圆 E 有且仅有 2 个公共点，选项 B 正确；由于椭圆 E 上的任意一点 H 与左焦点 F_1 的距离 $|HF_1|\geqslant a-c=\sqrt{2}-1$（$H$ 为左顶点时取“=”），故以 F_1 为圆心，$\sqrt{2}-1$ 为半径的圆与椭圆 E 只有一个公共点 $(-\sqrt{2},0)$，选项 C 错误；设 M 为线段 PQ 的中点，过点 P，Q，M 作直线 l 的垂线，垂足分别为点 P_1，Q_1，M_1，则 $\frac{1}{2}|PQ|=\frac{1}{2}(|PF_1|+|QF_1|)=\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}|PP_1|+\frac{\sqrt{2}}{2}|QQ_1|)<\frac{1}{2}(|PP_1|+|QQ_1|)=|MM_1|$，即以 $|PQ|$ 为直径的圆的圆心到直线 l 的距离大于该圆的半径，选项 D 正确．

11.【命题意图】本小题设置数学课程学习情境、探索创新情境，设计正方体中的问题，体现基础性和创新性，主要考查点在平面上的射影、点到平面的距离、直线和平面所成的角等基础知识；考查数与形结合、特殊与一般、化归与转化等思想方法，以及探索性、创新性的思维品质；考查直观想象、数学运算和逻辑推理等核心素养。

【答案】BCD

【解析】连接 A_1C，易知直线 $A_1C \perp BD$，$A_1C \perp BC_1$，所以直线 $A_1C \perp$ 平面 BC_1D．当 P 为线段 AA_1 的中点时，$OP // A_1C$，此时点 O 是点 P 在平面 BC_1D 上的射影，选项 A 错误；连接 A_1C_1，C_1O，AC，易证平面 $AA_1C_1C \perp$ 平面 BC_1D，OC_1 为这两平面的交线，于是点 P 在平面 BC_1D 上的射影在直线 OC_1 上，显然 OC_1 为线段 BD 的中垂线，选项 B 正确；显然直线 OP 与平面 BC_1D 所成的角等于直线 OC 与平面 BC_1D 所成的角（等于 $\angle C_1OC$），而 $\tan\angle C_1OC=\dfrac{CC_1}{OC}=\sqrt{2}$，选项 C 正确；由上述可知，点 C 到平面 BC_1D 的距离等于 $\dfrac{1}{3}A_1C=\dfrac{\sqrt{3}}{3}AA_1$，所以点 P 到平面 BC_1D 的距离等于 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}AA_1$，选项 D 正确．



12.【命题意图】本小题设置课程学习情境，设计三角函数求值问题，主要考查同角三角函数关系，诱导公式，两角和的正弦公式，特殊角的三角函数值等基础知识；考查运算求解、推理论证能力；考查数学运算等数学核心素养。

【答案】$\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

【解析】由 $\alpha \in (\dfrac{\pi}{2},\pi)$ 且 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$ 得 $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$，则 $\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=\sin\alpha\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+(-\dfrac{3}{5})\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$．

13.【命题意图】本小题设计生活实践情境，设计排列组合相关问题，考查分类加法和分步乘法计数原理；考查分类与整合等数学思想及应用能力；考查数学抽象、逻辑推理等数学核心素养。

【答案】20

【解析】当甲和乙站前排，丙站后排时，不同站法有 $A_2^2A_3^3=12$（种）；当甲和乙站后排，丙站后排时，不同站法有 $A_2^2A_2^2A_2^2=8$（种），所以不同的站法共有 $12+8=20$（种）．

14.【命题意图】本小题设置探索创新情境，设计函数与导数相关问题，主要考查导数的几何意义、函数零点等基础知识；考查化归与转化、数形结合、函数与方程等数学思想，考查数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学建模等数学核心素养。本小题是根据选择性必修二探究与发现（牛顿法——用导数方法求方程的近似解）编制而成。

【答案】3.3

【解析】由 $f(x)=x^3-3x^2-3$，得 $f'(x)=3x^2-6x$．当 $x_0=3$ 时，$f'(3)=9$，$f(3)=-3$，则过点 $(3,f(3))$ 的切线方程为 $y=9(x-3)-3$，令 $y=0$，得 $x_1=\dfrac{10}{3}\approx 3.3$．又 $f'(\dfrac{10}{3})=\dfrac{40}{3}$，$f(\dfrac{10}{3})=(\dfrac{10}{3})^3-3(\dfrac{10}{3})^2-3=\dfrac{19}{27}$，则过点 $(\dfrac{10}{3},f(\dfrac{10}{3}))$ 的切线方程为 $y=\dfrac{40}{3}(x-\dfrac{10}{3})+\dfrac{19}{27}$，令 $y=0$，得 $x_2=\dfrac{1181}{360}\approx 3.3$，此时 x_1 与 x_2 近似值相等，故近似解 r 约为 3.3．