四川省高三年级第一次联合诊断性考试

数　学

考试时间120分钟，满分150分

注意事项：

1. 答题前，考生务必在答题卡上将自己的姓名、座位号、考籍号用0.5毫米黑色签字笔填写清楚，考生考试条形码由监考老师粘贴在答题卡上的“贴条形码区”。

2. 选择题使用2B铅笔填涂在答题卡上对应题目标号的位置上，如需改动，用橡皮擦擦干净后再填涂其它答案；非选择题用0.5毫米黑色签字笔在答题卡的对应区域内作答，超出答题区域答题的答案无效；在草稿纸上、试卷上答题无效。

3. 考试结束后由监考老师将答题卡收回。

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 集合 $A=\{x|x\leqslant -1,或x\geqslant 2\}$，$B=\{x|2x-1\geqslant 2-x\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x|x\leqslant -1,或x\geqslant 1\}$　　B. $\{x|x\geqslant 1\}$

C. $\{x|x\leqslant -1,或x\geqslant 2\}$　　D. $\{x|x\geqslant 2\}$

2. 在复平面内，复数 $z=(a-2)+(1+2a)\mathrm{i}$ 对应的点位于第二象限，则实数 a 的取值范围为

A. $(-\frac{1}{2},2)$　　B. $(-\infty,-\frac{1}{2})$　　C. $(2,+\infty)$　　D. $(-2,\frac{1}{2})$

3. 已知 $x\in\mathbf{R}$，设甲：$\sin x\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$；乙：$\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$，则甲是乙的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

4. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(-1,\sqrt{3})$，$\boldsymbol{b}=(-\sqrt{3},1)$，则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为

A. $(-3,0)$　　B. $(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$　　C. $(-3,\sqrt{3})$　　D. $(-1,\frac{\sqrt{3}}{2})$

5. 在2024年巴黎奥运会上，我国网球选手郑钦文历经6场比赛，勇夺巴黎奥运会女子网球单打冠军，书写了中国网球新的历史．某学校有2 000名学生，一机构在该校随机抽取了800名学生对郑钦文奥运会期间6场单打比赛的收看情况进行了调查，将数据分组整理后，列表如下：

观看场次	0	1	2	3	4	5	6
观看人数占调查人数的百分比	15%	5%	5%	m%	10%	15%	$4m$%

从表中数据可以得出的正确结论为

A. 表中 m 的数值为15

B. 观看场次不超过3场的学生的比例为30%

C. 估计该校观看场次不超过2场的学生约为400人

D. 估计该校观看场次不低于4场的学生约为1 300人

6. 已知$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c,且$\dfrac{a-c}{b+c}=\dfrac{\sin B}{\sin A+\sin C}$,则$A=$

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{2\pi}{3}$　　D. $\dfrac{5\pi}{6}$

7. 设双曲线C:$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为$\sqrt{5}$,实轴长为2,则双曲线$C$上任意一点到双曲线$C$的两条渐近线的距离的乘积为

A. $\dfrac{2}{5}$　　B. $\dfrac{4}{5}$　　C. $\dfrac{8}{5}$　　D. $\dfrac{16}{5}$

8. 已知函数$f(x)=\dfrac{(2^x+a)(x-1)}{2^{x-1}+1}$,且$f(x+1)$为偶函数,则满足不等式$f(2+am)<f(4)$的实数$m$的取值范围为

A. $(-\infty,-1)$　　B. $(2,+\infty)$

C. $(-1,2)$　　D. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

二、选择题:本大题共3小题,每小题6分,共18分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得6分,选对但不全的得部分分,有选错的得0分。

9. 已知函数$f(x)=\sqrt{3}\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}$,则

A. $f(x)$的最小正周期为4π

B. $f(x)$在$\left(-\dfrac{11\pi}{6},\dfrac{\pi}{6}\right)$上单调递增

C. $f(x)$的图象关于直线$x=-\dfrac{4\pi}{3}$对称

D. $f(x)$的图象可由$y=2\sin\dfrac{x}{2}$的图象向左平移$\dfrac{\pi}{6}$个单位得到

10. 已知椭圆E:$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$的左、右焦点分别为F_1,F_2,过点F_1的直线与椭圆E相交于P,Q两点,则

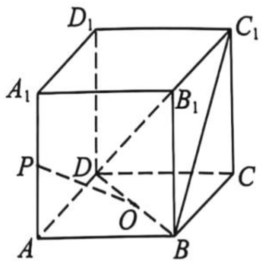
A. 以椭圆E的长轴为直径的圆的方程为$x^2+y^2=2$

B. 以F_1F_2为直径的圆与椭圆E有且仅有2个公共点

C. 以F_1为圆心,$\sqrt{2}-1$为半径的圆与椭圆E有3个公共点

D. 以$|PQ|$为直径的圆与直线l:$x=-2$相离

11. 如图,在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,O是线段BD的中点,点P在棱AA_1上运动,则



A. 点P在平面BC_1D上的射影不可能是点O

B. 点P在平面BC_1D上的射影到B,D两点的距离相等

C. 当点P与顶点A重合时,直线OP与平面BC_1D所成角的正切值为$\sqrt{2}$

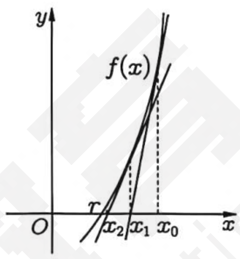
D. 当点P与顶点A_1重合时,点P到平面BC_1D的距离等于$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}AA_1$

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$ 且 $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，则 $\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})=$________.

13. 甲、乙、丙、丁、戊 5 人站成两排照相，前排站 2 人，后排站 3 人，其中甲和乙须左右相邻，丙不站前排，则不同的站法共有________种(用数字作答).

14. 人们很早以前就开始探索高次方程的数值求解问题．牛顿在《流数法》一书中，给出了高次代数方程的一种数值解法——牛顿法．如图，在横坐标为 x_0 的点处作 $f(x)$ 的切线，该切线与 x 轴的交点为 x_1；$f(x)$ 在横坐标为 x_1 的点处的切线与 x 轴的交点为 x_2；一直继续下去，得到 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，它们越来越逼近 $f(x)$ 的零点 r．在一定精确度下，用四舍五入法取值，当 x_{n-1}，x_n 近似值相等时，该值可作为函数 $f(x)$ 的一个零点 r．用“牛顿法”求方程 $x^3-3x^2-3=0$ 的近似解 r，可以构造函数 $f(x)=x^3-3x^2-3$，若 $x_0=3$，得到该方程的近似解 r 约为________（精确到 0.1）.



四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（13 分）

如图的形状出现在南宋数学家杨辉所著的《详解九章算法•商功》中，后人称为“三角垛”．“三角垛”的最上层有 1 个球，第二层有 3 个球，第三层有 6 个球……

设各层球数构成一个数列 $\{a_n\}$.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $b_n=\frac{1}{a_n}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

16.（15 分）

已知某学校为提高学生课外锻炼的积极性，开展了丰富的课外活动．为了解学生对开展的课外活动的满意程度，该校随机抽取了 350 人进行调查，整理得到如下列联表：

性别	课外活动		合计
	满意	不满意	
男	150	100	250
女	50	50	100
合计	200	150	350

(1)根据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验，能否认为该校学生对课外活动的满意情况与性别因素有关联？

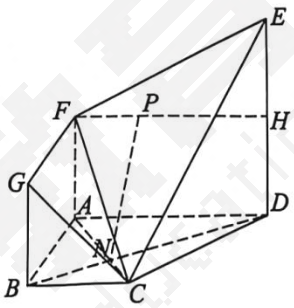
(2)从这 350 名样本学生中任选 1 名学生，设事件 $A=$“选到的学生是男生”，事件 $B=$“选到的学生对课外活动满意”，比较 $P(B|A)$ 和 $P(B|\bar{A})$ 的大小，并解释其意义.

附： $\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

α	0.1	0.05	0.01
x_α	2.706	3.841	6.635

17.（15分）

如图，在几何体 $ABCDEFG$ 中，四边形 $ABCD$ 是梯形，$AD\parallel BC$，$AB\perp AD$，AC 与 BD 相交于点 N，$DE\perp$ 平面 $ABCD$，$DE\parallel AF\parallel BG$，$H$ 是 DE 的中点，$DE=AD=2$，$AF=BG=AB=BC=1$.



(1)点 P 在 FH 上，且 $FP=\dfrac{1}{3}FH$，证明：$NP\parallel$ 平面 EFC；

(2)求二面角 $E-FC-G$ 的余弦值.

18.（17分）

已知 F 为抛物线 E：$y^2=4x$ 的焦点，过点 F 的直线与抛物线 E 相交于 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ $(x_1<x_2)$ 两点.

(1)证明：x_1x_2 是常数；

(2)过点 F 作直线 AB 的垂线 l 与抛物线 E 的准线相交于点 P，与抛物线 E 相交于 C，D 两点(点 C 的横坐标小于点 D 的横坐标).

①求 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的值；

② $|FA||FC|+|FB||FD|$ 是否存在最小值？若存在，请求出这个最小值；若不存在，请说明理由.

19.（17分）

已知函数 $f(x)=e^x-ax^3-3ax^2$.

(1)若 $a=-1$，求函数 $y=f(x)-e^x$ 的极值；

(2)若 $x\geqslant 0$，$f(x)\geqslant x+1$，求实数 a 的取值范围；

(3)若 $n\in\mathbf{N}^*$，且 $n\geqslant 2$，证明：$\left(1+\dfrac{1+1}{3+1}\right)\left(1+\dfrac{3+1}{3^2+1}\right)\cdots\left(1+\dfrac{3^{n-1}+1}{3^n+1}\right)<\sqrt[3]{e^{n+1}}$.