德阳市高中2022级第一次诊断考试

数学参考答案与评分标准

一、选择题(本大题共8小题,每小题5分,共40分)

1.D 2.B 3.B 4.C 5.D 6.A 7.C 8.B

二、选择题(本大题共3小题,每小题6分,共18分)

9.AC 10.ACD 11.BD

三、填空题(本大题共3小题,每小题5分,共15分)

12.8 13.$\frac{7}{9}$ 14.$(-e,0)\cup(0,\frac{1}{e})$

四、解答题(本大题共5小题,共77分)

15. 解:(1)由题意得$(\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2})\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$,从而$\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}=-1$,亦即$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}|^2$…………(3分)

又$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{e}_2)\cdot(t\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2)=2t,|\boldsymbol{a}|^2=(\boldsymbol{e}_1+t\boldsymbol{e}_2)^2=1+t^2$

所以$t^2+2t+1=0$

即$t=-1$ ……………………………………………………(7分)

(2)$<\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}>$为钝角$\Leftrightarrow\begin{cases}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0\\ \boldsymbol{a}与\boldsymbol{b}不共线\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2t<0\\ t^2\neq1\end{cases}$

所以t的取值范围为$(-\infty,-1)\cup(-1,0)$ ……………………(13分)

16.解:(1)由$S=c^2\sin A=\frac{1}{2}bc\sin A$知$b=2c$ ……………………(3分)

由于$a=6,\cos A=\frac{1}{4}$,所以由余弦定理得

$36=b^2+c^2-2bc\cos A=4c^2+c^2-c^2=4c^2$,从而$c=3$ ……………(6分)

即$b=6$ ……………………………………………………(7分)

(2)$\triangle ABC$中有$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{36+3c^2}{24c}=\frac{3}{2c}+\frac{c}{8}\geqslant2\sqrt{\frac{3}{2c}\times\frac{c}{8}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(当且仅当$\frac{3}{2c}=\frac{c}{8}$,即$c=2\sqrt{3}$时取等号)……………………(10分)

此时,角C取到最大值$\frac{\pi}{6}$,$b=4\sqrt{3}$ ……………………(13分)

$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times6\times4\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=6\sqrt{3}$ ……………………(15分)

17.解:(1)因为$\lambda=\frac{3}{4}$,由$-x^2+\frac{3}{2}x+1>0$得$-\frac{1}{2}<x<2$ ……………(3分)

令$t=-x^2+\frac{3}{2}x+1$,则$t\in\left(0,\frac{25}{16}\right]$

从而$f(x)$的值域为$(-\infty,2]$ ……………………………………………………………………(6分)

(2)由于$D=(m,n)$,且$\Delta=4\lambda^2+4>0$,所以方程$-x^2+2\lambda x+1=0$的两根分别为m,n

且$m+n=2\lambda,mn=-1$ ……………………………………………………………………(8分)

又$[g(m)-g(n)]^2\leqslant 10$,即$\left[\dfrac{m-\lambda}{m^2+1}-\dfrac{n-\lambda}{n^2+1}\right]^2\leqslant 10$

亦即$\dfrac{1}{4}(m-n)^2\leqslant 10$,从而$(m+n)^2-4mn\leqslant 40$ ……………………………(13分)

所以$\lambda^2-9\leqslant 0\Leftrightarrow -3\leqslant\lambda\leqslant 3$

即实数λ的取值范围为$[-3,3]$ ……………………………………………………(15分)

18.解:(1)记第n次交换后甲袋中恰有两个白球的概率为q_n,则第n次交换后甲袋中恰有零个白球的概率为$1-p_n-q_n$

由题意得$p_1=\dfrac{C_1^1C_1^1+C_1^1C_1^1}{C_2^1C_2^1}=\dfrac{1}{2}$ ……………………………………………………(2分)

$p_2=p_1\times\dfrac{1}{2}+q_1\times 1+(1-p_1-q_1)\times 1=1-\dfrac{1}{2}p_1=\dfrac{3}{4}$ ………………………(5分)

(2)由(1)知$p_n=p_{n-1}\times\dfrac{1}{2}+q_{n-1}\times 1+(1-p_{n-1}-q_{n-1})\times 1=1-\dfrac{1}{2}p_{n-1}(n\in N^*,n\geqslant 2)$

所以$p_n-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{2}(p_{n-1}-\dfrac{2}{3})$,且$p_1-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{6}\neq 0$

从而数列$\left\{p_n-\dfrac{2}{3}\right\}$是以$-\dfrac{1}{6}$为首项,$-\dfrac{1}{2}$为公比的等比数列 ……………………(9分)

所以$p_n-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{6}(-\dfrac{1}{2})^{n-1}=\dfrac{1}{3}(-\dfrac{1}{2})^n$

即$p_n=\dfrac{1}{3}(-\dfrac{1}{2})^n+\dfrac{2}{3},(n\in N^*)$ ……………………………………………………(11分)

(3)显然X_n的所有可能取值为0,1,2

且$P(X_n=1)=\dfrac{1}{3}(-\dfrac{1}{2})^n+\dfrac{2}{3}$ ……………………………………………………(12分)

$q_n=p_{n-1}\times\dfrac{1}{4}+q_{n-1}\times 0+(1-p_{n-1}-q_{n-1})\times 0=-\dfrac{1}{6}(-\dfrac{1}{2})^n+\dfrac{1}{6}$

即$P(X_n=2)=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{6}(-\dfrac{1}{2})^n$,从而$P(X_n=0)=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{6}(-\dfrac{1}{2})^n$ …………(15分)

所以X_n的分布列为

X_n	0	1	2
P	$\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{6}(-\dfrac{1}{2})^n$	$\dfrac{1}{3}(-\dfrac{1}{2})^n+\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{6}(-\dfrac{1}{2})^n$

所以$E(X_n)=0+1\times\left[\dfrac{1}{3}(-\dfrac{1}{2})^n+\dfrac{2}{3}\right]+2\times\left[\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{6}(-\dfrac{1}{2})^n\right]=1$ ………(17分)

19.解:(1)$y=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$,由于$x\in R$,所以当$2x-\dfrac{\pi}{3}=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$

即$x=k\pi+\dfrac{5\pi}{12}\ (k\in Z)$时，$y_{\max}=2$；对于函数$y=x-\dfrac{\sin\pi x}{\pi}$，$y'=1-\cos\pi x\geqslant 0$，

所以函数$y=x-\dfrac{\sin\pi x}{\pi}$在$[0,2]$上单调递增，从而当$x=2$时，$y_{\max}=2$

函数$y=2\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos 2x, x\in R$与$y=x-\dfrac{\sin\pi x}{\pi}, x\in[0,2]$是"等峰函数" ……(4分)

(2)①$f'(x)=\dfrac{1-a\ln x}{x^{a+1}}, (x>0)$

当$a<0$时，若$x\in(0,e^{\frac{1}{a}})$，$f'(x)<0$；若$x\in(e^{\frac{1}{a}},+\infty)$，$f'(x)>0$，即函数$f(x)$在$(0,e^{\frac{1}{a}})$上单调递减，在$(e^{\frac{1}{a}},+\infty)$上单调递增，无最大值；

当$a=0$时，$f(x)=\ln x$在$(0,+\infty)$上单调递增，无最大值；

当$a>0$时，若$x\in(0,e^{\frac{1}{a}})$，$f'(x)>0$；若$x\in(e^{\frac{1}{a}},+\infty)$，$f'(x)<0$，即函数$f(x)$在$(0,e^{\frac{1}{a}})$上单调递增，在$(e^{\frac{1}{a}},+\infty)$上单调递减，所以当$x=e^{\frac{1}{a}}$时，$f(x)_{\max}=\dfrac{1}{ae}$ ………(7分)

$g'(x)=\dfrac{ax^{a-1}-x^a}{e^x}=\dfrac{x^{a-1}(a-x)}{e^x}, (x>0)$

因为$a>0$，所以$x\in(0,a)$时，$g'(x)>0$；$x\in(a,+\infty)$时，$g'(x)<0$，即函数$g(x)$在$(0,a)$上单调递增，在$(a,+\infty)$上单调递减，从而当$x=a$时，$g(x)_{\max}=\dfrac{a^a}{e^a}$ ………(8分)

由于$f(x)=\dfrac{\ln x}{x^a}$与$g(x)=\dfrac{x^a}{e^x}\ (x>0)$为"等峰函数"，所以$f(x)_{\max}=g(x)_{\max}$

即$\dfrac{1}{ae}=\dfrac{a^a}{e^a}, (a>0)$

将上式两端取自然对数得$-\ln a-1=a\ln a-a$，即$\ln a-\dfrac{a-1}{a+1}=0$

令$h(a)=\ln a-\dfrac{a-1}{a+1}$，则$h'(a)=\dfrac{1}{a}-\dfrac{2}{(a+1)^2}=\dfrac{a^2+1}{a(a+1)^2}>0$

所以$h(a)$在$(0,+\infty)$上单调递增，又$h(1)=0$，从而$a=1$ ………………(10分)

②命题为真命题，理由如下：

先考察方程$f(x)=g(x)$的实根情况，令$m(x)=f(x)-g(x)=\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{x}{e^x}$

由①知$f(x)$在$(1,e)$上单调递增，$g(x)$在$(1,e)$上单调递减，所以$m(x)=f(x)-g(x)$在$(1,e)$上单调递增，又$m(1)=-\dfrac{1}{e}<0$，$m(e)=\dfrac{1}{e}-\dfrac{e}{e^e}=\dfrac{e^{e-1}-e}{e^e}>0$，

所以存在唯一$x_0\in(1,e)$，使得$m(x_0)=0$，即方程$f(x)=g(x)$在$(1,e)$上有唯一实根x_0，且$f(x_0)=g(x_0)<\dfrac{1}{e}$ …………………………………………(11分)

其次考察方程$f(x)=f(x_0)$的实根情况，令$n(x)=f(x)-f(x_0)$

由①知$n(x)$在$(e,+\infty)$上单调递减，

且$n(e)=\dfrac{1}{e}-f(x_0)>0$，$n(e^{x_0+1})=\dfrac{x_0+1}{e^{x_0+1}}-\dfrac{x_0}{e^{x_0}}=\dfrac{1-x_0(e-1)}{e^{x_0+1}}<0$

所以存在唯一$x_1\in(e,+\infty)$，使得$n(x_1)=0$，即$f(x_1)=f(x_0)$，

由于$f(x_0)=g(x_0)=\dfrac{x_0}{e^{x_0}}=\dfrac{\ln e^{x_0}}{e^{x_0}}=f(e^{x_0})$，所以$f(x_1)=f(e^{x_0})$，且$e^{x_0}>e$，由$f(x)$在$(e,+\infty)$上的单调性知$x_1=e^{x_0}$ ……………………………………………(13分)

最后考察方程$g(x)=g(x_0)$的实根情况，令$p(x)=g(x)-g(x_0)$

由①知$p(x)$在$(0,1)$上单调递增，且$p(0)=-\dfrac{x_0}{e^{x_0}}<0$，$p(1)=\dfrac{1}{e}-\dfrac{x_0}{e^{x_0}}>0$

所以存在唯一$x_2\in(0,1)$，使得$p(x_2)=0$，即$g(x_2)=g(x_0)$

由于$g(x_0)=f(x_0)=\dfrac{\ln x_0}{x_0}=\dfrac{\ln x_0}{e^{\ln x_0}}=g(\ln x_0)$，所以$g(x_2)=g(\ln x_0)$，且$0<\ln x_0<1$，

由$g(x)$在$(0,1)$上的单调性知$x_2=\ln x_0$ ……………………………………………(15分)

所以$x_1x_2=e^{x_0}\ln x_0$，又$\dfrac{\ln x_0}{x_0}=\dfrac{x_0}{e^{x_0}}$，所以$e^{x_0}\ln x_0=x_0^2$

即$x_1x_2=x_0^2$，从而得知命题为真命题 ……………………………………………(17分)

②另解

先考察方程$f(x)=g(x)$的实根情况，令$m(x)=f(x)-g(x)=\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{x}{e^x}$

由①知$f(x)$在$(1,e)$上单调递增，$g(x)$在$(1,e)$上单调递减，所以$m(x)=f(x)-g(x)$在$(1,e)$上单调递增，又$m(1)=-\dfrac{1}{e}<0$，$m(e)=\dfrac{1}{e}-\dfrac{e}{e^e}=\dfrac{e^{e-1}-e}{e^e}>0$，

所以存在唯一$x_0\in(1,e)$，使得$m(x_0)=0$，即方程$f(x)=g(x)$在$(1,e)$上有唯一实根x_0，且$f(x_0)=g(x_0)<\dfrac{1}{e}$ ……………………………………………(11分)

易知：$\exists x_0\in(1,e)$使$f(x_0)=g(x_0)$即$\dfrac{\ln x_0}{x_0}=\dfrac{x_0}{e^{x_0}}\Rightarrow e^{x_0}\ln x_0=x_0^2$

令$x_2=\ln x_0$，$x_1=e^{x_0}$，则x_1,x_0,x_2成等比数列 …………………………(13分)

故只要$f(x_1)=f(x_0)=g(x_0)=g(x_2)$即可

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{\ln x}{e^{\ln x}}=g(\ln x)$，$g(x)=\dfrac{x}{e^x}=\dfrac{\ln e^x}{e^x}=f(e^x)$

又$g(x_2)=f(e^{x_2})=f(x_0)$

$f(x_1)=g(\ln x_1)=g(x_0)$　　　　所以$f(x_1)=f(x_0)=g(x_0)=g(x_2)$成立

故原命题为真… ……………………………………………(17分)