2025届“一诊”数学参考答案

一、选择题（40分）

1. C　2. C　3. A　4. D　5. B　6. B　7. A　8. D

二、多选题（18分）

9.. ABC　10. AC　11. ACD

三、填空题（15分）

12.1　　13.128　　14.（0,1）

四、解答题（77分）

15.（1）由题意得 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{14}a$..............2分

由正弦定理得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A}=\frac{7}{\sin B}=\frac{14}{\sqrt{3}}$，解得 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$

因为 B 为钝角，所以 $B=\frac{2\pi}{3}$ 6分

选择① $c=5$ 则由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，即 $\frac{14}{\sqrt{3}}=\frac{5}{\sin C}$，解得 $\sin C=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，

由题知 C 为锐角，则 $\cos C=\sqrt{1-\left(\frac{5\sqrt{3}}{14}\right)^2}=\frac{11}{14}$

则 $\sin A=\sin(B+C)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}+C\right)=\sin\frac{2\pi}{3}\cos C+\cos\frac{2\pi}{3}\sin C$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{11}{14}+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{5\sqrt{3}}{14}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$

则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times7\times5\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$

选择② $\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，则代入 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{14}a$，解得 $a=3$，

由题知 A 为锐角，则 $\cos A=\sqrt{1-\left(\frac{3\sqrt{3}}{14}\right)^2}=\frac{13}{14}$

$\sin C=\sin(A+B)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}+B\right)=\sin\frac{2\pi}{3}\cos B+\cos\frac{2\pi}{3}\sin B$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{13}{14}+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$

则$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 7\times 3\times\frac{5\sqrt{3}}{14}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$ ……………………………………………13 分

16.(1) $a_n=\frac{1}{2}(2n-1)$ ……………………………………………………………5 分

（2） $\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{4}{(2n-1)(2n+1)}=2(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$.

所以$T_n=2(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=2(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{4n}{2n+1}$

由$\lambda T_n-49\le a_n\therefore\lambda\le\frac{a_n+49}{T_n}=\frac{(2n+1)(2n+48)}{4n}=\frac{1}{2}(2n+\frac{24}{n}+49)$

不妨设$f(n)=\frac{1}{2}(2n+\frac{24}{n}+49)(n\in N^*)$,

而$2n+\frac{24}{n}\ge 2\sqrt{48}=8\sqrt{3}$，$2n=\frac{24}{n}$，$n=2\sqrt{3}\notin N^*$，.故$f(n)_{\min}\ne f(2\sqrt{3})$

而$f(3)=f(4)=\frac{63}{2}\therefore f(n)_{\min}=\frac{63}{2}$

因此$\lambda\in\left(-\infty,\frac{63}{2}\right]$ ……………………………………………………15 分

17. （1）因为$PA\perp$平面$ABCD$，而$BC\subset$平面$ABCD$，所以$PA\perp BC$

又$AC=4,BC=2,AB=2\sqrt{3}\therefore BC\perp AB$，

$AB\cap PA=A$，所以$BC\perp$平面PAB，

因为$AD//$平面PBC，平面$ABCD\cap$平面$PBC=BC$

所以$AD//BC$

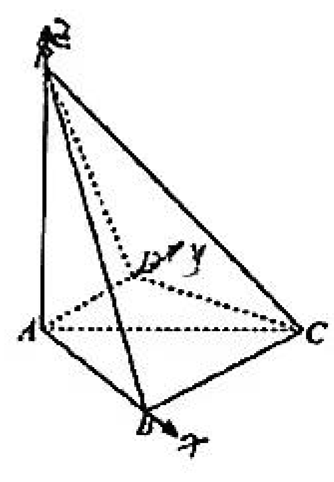
所以$AD\perp$平面PAB而$AB\subset$平面PAB，

因此$AD\perp PB$.　　　　　　　　　　　　　　　.6 分

（2）由$\Delta ACD, AD^2=4^2=CD^2+16-4\sqrt{3}CD,\therefore CD=2\sqrt{3}$，

$\therefore AB=CD=2\sqrt{3}, AD=BC=2$

由（1）知$BC\perp AB$，所以四边形$ABCD$为矩形.



建立如图所示的空间直角坐标系A-xyz

则$P(0,0,4),B(2\sqrt{3},0,0),C(2\sqrt{3},2,0),D(0,2,0)$

$\overrightarrow{PD}=(0,2-4),\overrightarrow{PB}=(2\sqrt{3},0,-4),\overrightarrow{PC}=(2\sqrt{3},2-4)$

设平面 PBD 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(a,b,c)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{PD}=2b-4c=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{PB}=2\sqrt{3}a-4c=0\end{cases}$ $\overrightarrow{n_1}=(2,2\sqrt{3},\sqrt{3})$

设平面 PCD 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{PD}=2y-4z=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{PC}=2\sqrt{3}x+2y-4z=0\end{cases}$ $\overrightarrow{n_1}=(0,2,1)$

$$\cos\left\langle\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{19}\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{15}{19}}=\frac{\sqrt{285}}{19}$$

平面 PBD 和平面 PDC 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{285}}{19}$ .15分

18（1） $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\ln x(x>0), f'(x)=x+\frac{1}{x}>0$ $\therefore x\in(0,\infty)$，$f(x)$ 单增

又 $f(1)=\frac{1}{2}>0$，$f(\frac{1}{e})=\frac{1}{2e^2}-1<0$

因此函数 $f(x)$ 只有 1 个零点 $x_0\in(\frac{1}{e},\frac{1}{2})$……………………5分

（2） $g(x)=a\ln x+\frac{1}{2}x^2-2x(x>0)$，$g'(x)=\frac{x^2-2x+a}{x}=0$

由函数 $g(x)$ 有两个极值点 $x_1,x_2(x_1>0,\ x_2>0)$

知方程 $x^2-2x+a=0$ 有两个正根 x_1,x_2，$\therefore\begin{cases}\Delta=4-4a>0\\ x_1x_2=a>0\end{cases}$ $\therefore 0<a<1$ 而 $x_1+x_2=2$

不妨令 $0<x_1<1<x_2$，则 $x\in(0,x_1), g'(x)>0, x\in(x_1,x_2) g'(x)<0, x\in(x_2,\infty), g'(x)>0$

$\therefore x_1$ 为极大值点 x_2 为极小值点

则 $h(a)=g(x_1)+g(x_2)+3=a\ln x_1x_2+\frac{1}{2}(x_1+x_2)^2-x_1x_2-2(x_1+x_2)+3$

$h(a)=a\ln a-a+1(0<a<1)$，$h'(a)=\ln a<0$

故 $h(a)$ 在（0, 1）单减，$\therefore h(a)>h(1)=0$.

所以 $g(x_1)+g(x_2)>-3$ .17分

19. (1) 记第i次甲赢的事件为A_i，乙赢的事件为B_i

$$P(B_2)=P(A_1B_2)+P(B_1B_2)=P(A_1)P(B_2|A_1)+P(B_1)P(B_2|B_1)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{12}$$ ……………………………… 4分

（2）(i) 由题意可知 $P_{i+1}=\frac{1}{3}P_i+\frac{1}{2}(1-P_i)=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}P_i$

构造等比数列$\{P_i+\lambda\}$，设$P_{i+1}+\lambda=-\frac{1}{6}(P_i+\lambda)$，解得$\lambda=-\frac{3}{7}$，

$$\therefore P_{i+1}-\frac{3}{7}=-\frac{1}{6}\left(P_i-\frac{3}{7}\right)，又\because P_1=\frac{1}{2}$$

$\therefore\left\{P_i-\frac{3}{7}\right\}$是以$\frac{1}{14}$为首项，$-\frac{1}{6}$为公比的等比数列

$\therefore P_i-\frac{3}{7}=\frac{1}{14}\times\left(-\frac{1}{6}\right)^{i-1}$，$P_i=\frac{3}{7}+\frac{1}{14}\times\left(-\frac{1}{6}\right)^{i-1}$ ……………………………… 10分

(ii) 设函数$f(x)=e^x-\ln(x+1)+k$．$f'(x)=e^x-\frac{1}{x+1}$，$f''(x)=e^x+\left(\frac{1}{x+1}\right)^2>0$.

$\therefore f'(x)$在$(-1,+\infty)$单调递增

又$\because f'(0)=0$，$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$单调递增

由（Ⅰ）知$P_i=\frac{3}{7}+\frac{1}{14}\times\left(-\frac{1}{6}\right)^{i-1}$

i为奇数时，$P_i=\frac{3}{7}+\frac{1}{14}\times\left(\frac{1}{6}\right)^{i-1}$，$P_i$随着$i$增大而减小，$\frac{3}{7}<P_i\le\frac{1}{2}$

i为偶数时，$P_i=\frac{3}{7}-\frac{1}{14}\times\left(\frac{1}{6}\right)^{i-1}$，$P_i$随着$i$增大而增大，$\frac{5}{12}\le P_i<\frac{3}{7}$

若存在i，使$e^{P_i}-\ln(P_i+1)+k\ge0$成立，即$f(P_i)_{\max}\ge0$．

$f(P_i)_{\max}=f\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}-\ln\left(\frac{1}{2}+1\right)+k\ge0$，即$\therefore k\ge\ln\frac{3}{2}-\sqrt{e}$，

$\because 1.6<\sqrt{e},\ln\frac{3}{2}-0.6=\ln\frac{2e}{5}>0,\ln\frac{3}{2}-\sqrt{e}+2>0$

$\therefore -2<\ln\frac{3}{2}-\sqrt{e}<-1,k_{\min}=-1$ ．17分