自贡市普高2025届第一次诊断性考试

数学试题

本试卷共4页19题.全卷满分150分.考试时间120分钟.

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上.

2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

3. 非选择题的作答：用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内.写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效.

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的. 请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上.

1. 已知集合 $A=\left\{x\mid x^2<3\right\}, B=\{-2,-1,0,1,2\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{-1,0\}$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{-1,0,1\}$　　D. $\{-1,1\}$

2. 在复平面内，复数 z_1, z_2 对应的向量分别是 $\overrightarrow{OA}=(-2,3), \overrightarrow{OB}=(3,-2)$，则复数 $\dfrac{z_2}{z_1-z_2}$ 对应的点位于（　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 下列函数是偶函数的是（　　）

A. $y=\cos x-x^2$　　B．$y=\mathrm{e}^x-x^2$

C. $y=\log_2(\sqrt{x^2+1}-x)$　　D. $y=\sin x+4x$

4. 已知 $\tan\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=-2$，则 $\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=$（　　）

A. $-\dfrac{3}{2}$　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{3}{2}$

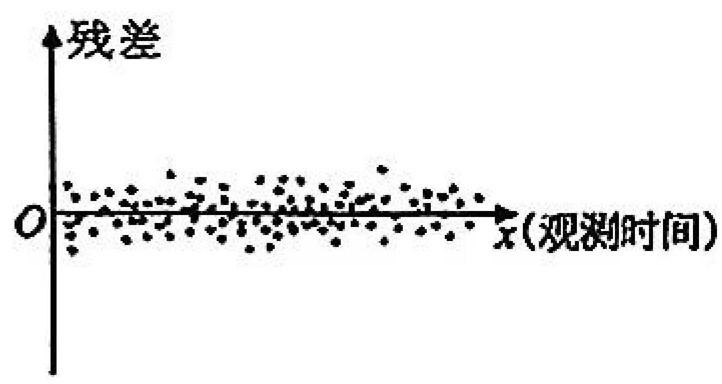
5. 同时掷两枚质地均匀的骰子，观察朝上点数，设两枚骰子朝上点数分别是 X_1, X_2 设 $\eta=\min\left\{X_1, X_2\right\}$，则 $\eta=2$ 的概率为（　）

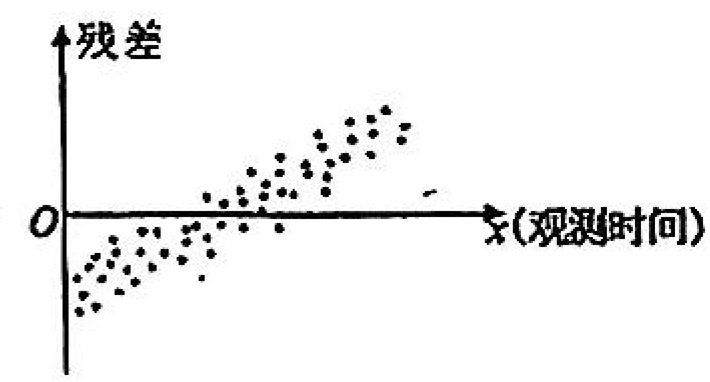
A. $\dfrac{11}{36}$　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{7}{36}$　　D. $\dfrac{5}{36}$

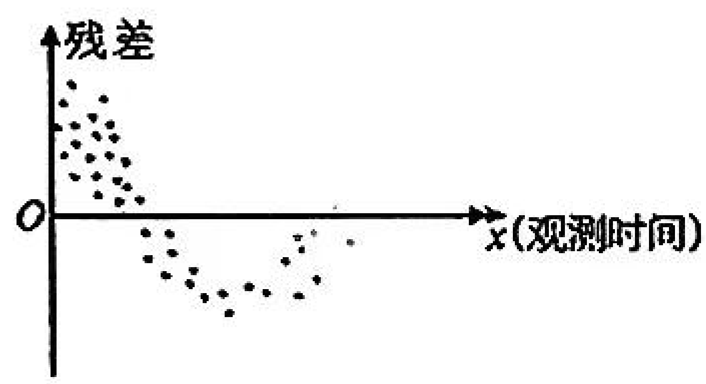
6. 已知$\alpha\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，且$\alpha$与$\beta$的终边关于$y$轴对称，则$\cos\beta$的最大值为（　　）

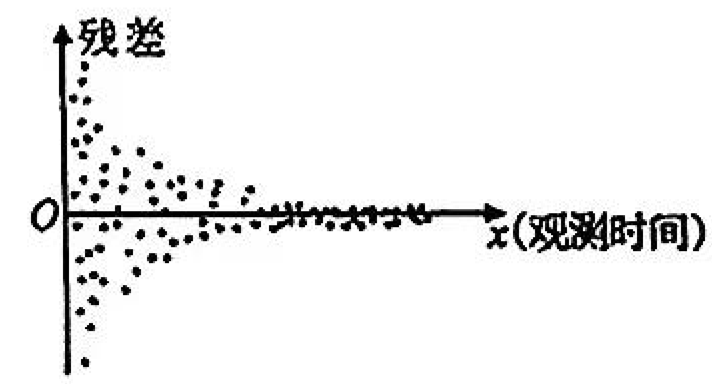
A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　　　B. $-\frac{1}{2}$　　　　C. 0　　　　D. 1

7. 根据变量y和x的成对样本数据，由一元线性回归模型$\begin{cases}Y=bx+a+e\\E(e)=0,D(e)=\sigma^2\end{cases}$得到经验回归模型$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，求得残差图.对于以下四幅残差图，满足一元线性回归模型中对随机误差假设的是（　）

A. 

B. 

C. 

D. 

8. 已知空间直角坐标系$O-xyz$中的点集Ω，对任意$P_1,P_2,P_3\in\Omega$，都存在不全为零的实数$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$满足$\lambda_1\overrightarrow{OP_1}+\lambda_2\overrightarrow{OP_2}+\lambda_3\overrightarrow{OP_3}=\vec{0}$．若$(0,2,0)\in\Omega$，则$(2,0,0)\notin\Omega$的一个充分条件是(　　).

A. $(0,0,0)\in\Omega$　　　B. $(-2,0,0)\in\Omega$　　　C. $(0,-2,0)\in\Omega$　　　D. $(0,0,2)\in\Omega$

二、多项选择题：本大题共3小题，每小题6分，共18分. 在每小题给出四个选项中，有多项符合题目要求. 全部选对得6分，选对但不全得部分分，有选错得0分.

9. 函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$x\in R$），（$A>0$，$\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}$），若$f(x)$在区间$\left[\frac{1}{6},1\right]$单调递减，且$f(\frac{1}{3})=f(0)=-f(1)$，下列正确的是（　　）

A. $\varphi=\frac{\pi}{3}$　　　　　　　　B. $f(x)$在区间$\left[\frac{4}{3},2\right]$单调递增

C. 函数$f(x)$的最小正周期为2　　　　D. $f(x)$图象的对称轴是$x=-\frac{7}{6}$

10. 不相同的数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$，且都不为常数数列，$M=\{k\mid a_k=b_k\}$，则下列正确的是（ ）

A. 数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$均为等差数列，则M中最多一个元素；

B. 数列$\{a_n\}$为等差数列，$\{b_n\}$为等比数列，则M中最多两个元素；

C. 数列$\{a_n\}$单调递增，数列$\{b_n\}$单调递减，则M中最多一个元素；

D. 数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$均为等比数列，则M中最多三个元素.

11. 已知定义在R上的函数$f(x)$满足$f(x+3)+f(x+1)=f(2024)$，且$f(2x+1)$是奇函数，则（ ）

A. $f(3)=f(-1)$　　　　B. $f(2)=1$

C. $f(x)$的图象关于点$(1,0)$对称　　　　D. 若$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$，则$\sum\limits_{i=2}^{100}if\left(i-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 在多项式$(3x-a)(1-x)^5$的展开式中，x^5的系数为 16，则$a=$__________.

13. 高为 8 的正四棱锥$P-ABCD$的顶点都在半径为 5 的球面上，则该正四棱锥的表面积为________.

14. 曲线$y=e^x$上两点A、B关于直线$y=x$对称的点A'、B'在曲线$y=kx^2-x$上，则k的取值范围是________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（13 分）在$\triangle ABC$中，内角A,B,C的对边分别为a,b,c，$b=7$，B为钝角，$\frac{\sin 2A}{a}=\frac{\sqrt{3}}{7}\cos A$.

（1）求B；

（2）从以下①②这两个条件中选择一个作为已知，求$\triangle ABC$的面积.

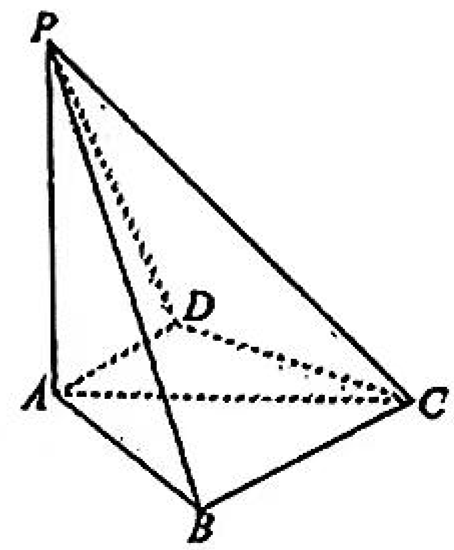
①$c=5$；②$\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

16.（15 分）数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\frac{1}{2}n^2$

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$T_n=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}$，$\forall n\in\mathbf{N}^*$，$\lambda T_n-49\le 2a_n$恒成立，求$\lambda$的取值范围，

17.（15 分）如图$PA\perp$平面$ABCD$，$PA=AC=4$，$BC=2$，$AB=2\sqrt{3}$.



（1）若$AD\parallel$平面PBC，证明：$AD\perp PB$；

（2）若$AD=2$，$\angle ACD=\frac{\pi}{6}$，求平面PBD和平面PDC夹角的余弦值.

18.（17分）已知函数$f(x)=\frac{1}{2}x^2+a\ln x(a>0)$.

（1）$a=1$时，判断函数$f(x)$的零点个数；

（2）设$g(x)=f(x)-2x$，若函数$g(x)$有两个极值点$x_1,x_2(x_1>0,\ x_2>0)$，比较$g(x_1)+g(x_2)$与-3的大小并说明理由.

19.（17 分）某学校为丰富学生活动，积极开展乒乓球选修课，甲乙两同学进行乒乓球训练，已知甲第一局赢的概率为$\frac{1}{2}$，前一局赢后下一局继续赢的概率为$\frac{1}{3}$，前一局输后下一局赢的概率为$\frac{1}{2}$，如此重复进行.

（1）求乙同学第2局赢的概率；

（2）记甲同学第i局赢的概率为P_i.

（i）求P_i；

（ii）若存在i，使$e^{P_i}-\ln(P_i+1)+k\ge 0$成立，求整数$k$的最小值.