成都石室中学2024－2025学年度上期高2025届11月半期考试

数学参考答案

双向细目表

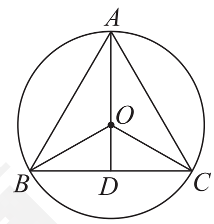
题号	题型	分值	难度预估	内容	具体内容
1	单项选择题	5	0.95	集合	集合运算
2	单项选择题	5	0.9	向量	数量积
3	单项选择题	5	0.8	三角函数	诱导公式、倍角公式
4	单项选择题	5	0.75	正态分布	正态分布
5	单项选择题	5	0.7	向量	投影向量
6	单项选择题	5	0.7	三角函数	三角函数图象分析
7	单项选择题	5	0.5	函数性质	函数奇偶性及单调性分析
8	单项选择题	5	0.4	不等式	不等式
9	多项选择题	6	0.8	三角函数	正弦函数图象特点分析
10	多项选择题	6	0.5	函数	三次函数图象分析
11	多项选择题	6	0.3	函数性质	函数奇偶性、对称、周期性分析
12	填空题	5	0.8	复数	复数计算
13	填空题	5	0.5	概率	概率计算
14	填空题	5	0.3	函数	数列及函数零点
15(1)	解答题	6	0.8	概率统计	K^2 检验
15(2)	解答题	7	0.7		分布列
16(1)	解答题	3	0.8	立体几何	线线垂直证明
16(2)	解答题	4	0.7		二面角
17(1)	解答题	4	0.7	解斜三角形	正余弦定理应用
17(2)	解答题	5	0.6		解斜三角形求周长
17(3)	解答题	6	0.4		解斜三角形求面积
18(1)	解答题	5	0.6	解析几何	抛物线方程
18(2)	解答题	6	0.6		切线问题
18(3)	解答题	6	0.4		四边形面积
19(1)	解答题	5	0.7	导数	函数恒成立问题
19(2)	解答题	6	0.5		利用函数单调性证明自变量大小
19(3)	解答题	6	0.3		数列不等式证明

答案及解析

1.【参考答案】C

【解题思路】由题意可知，$A=\{x|y=\ln(x-1)\}=\{x|x-1>0\}=\{x|x>1\}$，$B=\{y|y=e^{-x}\}=\{y|y>0\}$，所以 $A\cap B=(1,+\infty)$. 故选 C.

2.【参考答案】B



【解题思路】如图，延长 AO 交 BC 于点 D. 因为单位圆 O 半径为 1，$\triangle ABC$ 为单位圆 O 的内接正三角形，所以 $OA=OB=OC=1$. 又因为 O 是正$\triangle ABC$ 的中心，所以 $AD\perp BC$，$OD=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2}$，所以 $AD=OA+OD=\frac{3}{2}$. 设$\triangle ABC$ 的边长为 a. 由勾股定理，得 $|AB|^2=|AD|^2+|BD|^2$，即 $a^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2$，解得 $a=\sqrt{3}$（负值已舍去），所以 $|\overrightarrow{BO}|=1$，$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{3}$. 易得$\overrightarrow{BO}$，$\overrightarrow{BC}$的夹角为$\frac{\pi}{6}$，所以$\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BO}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos\frac{\pi}{6}=\frac{3}{2}$. 故选 B.

3.【参考答案】C

【解题思路】由三角函数定义知，$\tan\alpha=\frac{2}{-1}=-2$，$\cos\alpha<0$，所以$\frac{\sqrt{2-2\cos 2\alpha}}{\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}=\frac{\sqrt{4\sin^2\alpha}}{-\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-2\tan\alpha=4$. 故选 C.

4.【参考答案】A

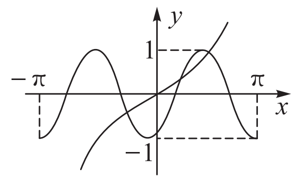
【解题思路】因为 $X\sim N(30,2^2)$，所以 $\mu=30$，$\sigma=2$，所以 $P(26<X\leqslant 34)\approx 0.954$. 根据正态曲线的对称性可得，$p_0=P(X\geqslant 26)=P(26<X\leqslant 34)+P(X>34)\approx 0.954+\frac{1-0.954}{2}=0.977$. 故选 A.

5.【参考答案】B

【解题思路】因为 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，所以 $(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=4\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=0$，所以 $|\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}|$. 因为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量是$\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$，所以 $|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$，即 $\frac{1}{2}\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{1}{2}$. 又因为$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$，所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是$\frac{\pi}{3}$. 故选 B.

6.【参考答案】C

【解题思路】当 $x\in(-\pi,\pi)$时，$\cos\frac{x}{2}\neq 0$，原方程化为 $\tan\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$. 令 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，$g(x)=\tan\frac{x}{2}$，则原方程的解的个数即为函数 $f(x)$与 $g(x)$的图象在$(-\pi,\pi)$上的交点个数. 作出函数 $f(x)$和 $g(x)$的大致图象如图，$g(x)=\tan\frac{x}{2}$在$(-\pi,\pi)$上单调递增，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$，$f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$，$\frac{5\pi}{12}<\frac{\pi}{2}$，由图可知函数 $f(x)$和 $g(x)$在$(-\pi,\pi)$上有 3 个交点，即原方程在$(-\pi,\pi)$上有 3 个实数根. 故选 C.



7.【参考答案】 D

【解题思路】 由题意可得，$f(-x)+g(-x)=ax^2-x+2$. 因为 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，所以 $-f(x)+g(x)=ax^2-x+2$. 联立 $\begin{cases} f(x)+g(x)=ax^2+x+2, \\ -f(x)+g(x)=ax^2-x+2, \end{cases}$ 解得 $g(x)=ax^2+2$. 又因为对于任意的 $1<x_1<x_2<2$，都有 $\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}>-3$ 成立，所以 $g(x_1)-g(x_2)<-3x_1+3x_2$，即 $g(x_1)+3x_1<g(x_2)+3x_2$ 成立. 构造 $h(x)=g(x)+3x=ax^2+3x+2$，所以 $h(x)=ax^2+3x+2$ 在 $x\in(1,2)$ 上单调递增. 若 $a<0$，则对称轴 $x_0=-\dfrac{3}{2a}\geqslant 2$，解得 $-\dfrac{3}{4}\leqslant a<0$；若 $a=0$，则 $h(x)=3x+2$ 在 $x\in(1,2)$ 上单调递增，满足题意；若 $a>0$，则对称轴 $x_0=-\dfrac{3}{2a}\leqslant 1$ 恒成立. 综上所述，$a\in\left[-\dfrac{3}{4},+\infty\right)$. 故选 D.

8.【参考答案】 A

【解题思路】 设 $f(x)=ax-1$，$g(x)=x^2+bx-1$. 因为 $a>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 当 $0<x<\dfrac{1}{a}$ 时，$f(x)<0$；当 $x>\dfrac{1}{a}$ 时，$f(x)>0$. 因为 $g(x)$ 的图象开口向上，$g(0)=-1$，所以方程 $g(x)=0$ 有一正根一负根，即函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有且仅有一个零点，且为异号零点. 由题意可得，$f(x)g(x)\geqslant 0$，则当 $0<x<\dfrac{1}{a}$ 时，$g(x)\leqslant 0$；当 $x>\dfrac{1}{a}$ 时，$g(x)\geqslant 0$，所以 $\dfrac{1}{a}$ 是方程 $x^2+bx-1=0$ 的根，则 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{b}{a}-1=0$，即 $b=a-\dfrac{1}{a}$，且 $a>0$，所以 $b+\dfrac{5}{a}=a+\dfrac{4}{a}\geqslant 2\sqrt{a\cdot\dfrac{4}{a}}=4$，当且仅当 $a=2$ 时等号成立. 故选 A.

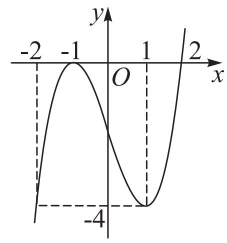
9.【参考答案】 ACD

【解题思路】 由图象可得，$A=2$，$T=4\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{12}\right)=\pi$，故 $\omega=2$，代入点 $\left(\dfrac{\pi}{12},2\right)$，易得 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$. 因为 $2\cdot\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)+\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{2}$，所以当 $x=-\dfrac{5\pi}{12}$ 时函数 $f(x)$ 取得最小值，即直线 $x=-\dfrac{5\pi}{12}$ 为函数 $f(x)$ 的一条对称轴，故 A 正确；由对称性可知，$f(x)$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{7\pi}{12}\right]$ 上单调递减，$\left[\dfrac{7\pi}{12},\dfrac{13\pi}{12}\right]$ 上单调递增，故 B 错误；$f\left(x-\dfrac{2\pi}{3}\right)=2\sin(2x-\pi)=-2\sin 2x$ 为奇函数，故 C 正确；将 $f(x)$ 的图象上所有点的横坐标变为原来的 2 倍，得到函数 $y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象，故 D 正确. 故选 ACD.

10.【参考答案】 AD

【解题思路】 因为 $f(-1)=-1+3+a=0$，即 $a=-2$，所以 $f(x)=x^3-3x-2=(x+1)^2(x-2)$，所以 $f(x)+f(-x)=-4$，所以 $f(x)$ 的图象关于 $(0,-2)$ 对称，故 A 正确；当 $f(x)=(x+1)^2(x-2)<0$ 时，$x\neq -1$ 且 $x<2$，故 B 错误；当 $0<x<1$ 时，$0<x^2<x<1$，而 $f'(x)=3x^2-3<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$

上单调递减,所以 $f(x^2)>f(x)$,故 C 错误;$f(x)=x^3-3x-2$,$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$,所以在区间$(-\infty,-1)$,$(1,+\infty)$上 $f'(x)>0$,即 $f(x)$单调递增;在区间$(-1,1)$上 $f'(x)<0$,即 $f(x)$单调递减,$f(-1)=0$,$f(1)=-4$,$f(-2)=-4$,画出 $f(x)$的大致图象如图. 因为当 $x\in[m,n]$时,$f(x)\in[-4,0]$,所以由图可知,$n-m$ 的最大值为 $2-(-2)=4$,故 D 正确. 故选 AD.



11.【参考答案】ACD

【解题思路】令 $x=4$,得 $f(4)+g(-2)=2$;令 $x=-4$,得 $f(-4)+g(6)=2$. 因为 $f(x)$为奇函数,所以 $f(x)=-f(-x)$,则 $g(-2)+g(6)=4$,故 A 正确;因为 $f(x)$为奇函数,所以 $f'(x)$为偶函数,则求不出 $f'(0)=0$,故 B 错误;因为 $f(x)+g(2-x)=2$,所以 $f'(x)-g'(2-x)=0$. 又 $f'(x)+g'(x+1)=2$,所以 $g'(x+1)+g'(2-x)=2$,则$g'(x)$关于$\left(\frac{3}{2},1\right)$中心对称. 因为 $f'(x)=2-g'(x+1)$,所以结合函数图象平移可得,$f'(x)$关于点$\left(\frac{1}{2},1\right)$中心对称,故 C 正确;由$f'(x)$为偶函数,点$\left(\frac{1}{2},1\right)$为对称中心,得$f'(x)$的周期为 2,且 $f'(x)+f'(1-x)=2$,$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=f'\left(\frac{1}{2}\right)=1$. 又 $g'(x+1)=2-f'(x)$,所以 $g'(x)=2-f'(x-1)$,所以 $\sum\limits_{k=1}^{2025}g'\left(\frac{k}{2}\right)=\sum\limits_{k=1}^{2025}\left(2-f'\left(\frac{k}{2}-1\right)\right)=4050-\sum\limits_{k=1}^{2025}f'\left(\frac{k}{2}-1\right)$. 因为$\sum\limits_{k=1}^{4}f'\left(\frac{k}{2}-1\right)=f'\left(-\frac{1}{2}\right)+f'(0)+f'\left(\frac{1}{2}\right)+f'(1)=4$,所以$\sum\limits_{k=1}^{2025}f'\left(\frac{k}{2}-1\right)=4\times506+f'\left(\frac{2025}{2}-1\right)=2024+f'\left(\frac{2023}{2}\right)=2024+f'\left(\frac{1}{2}\right)=2025$,所以$\sum\limits_{k=1}^{2025}g'\left(\frac{k}{2}\right)=2025$,故 D 正确. 故选 ACD.

12.【参考答案】$\sqrt{10}$

【解题思路】由题意知,$z=\frac{3-3i}{1+i}=\frac{(3-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{3-3i-3i-3}{2}=-3i$,所以 $|z+1|=|-3i+1|=\sqrt{10}$.

13.【参考答案】$\frac{25}{32}$

【解题思路】设小万从这 8 道题中任选 1 道题且作对为事件 A,选到能完整做对的 4 道题为事件 B,选到有思路的 3 道题为事件 C,选到完全没有思路的题为事件 D,则 $P(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$,$P(C)=\frac{3}{8}$,$P(D)=\frac{1}{8}$. 由全概率公式,得 $P(A)=P(B)P(A|B)+P(C)P(A|C)+P(D)P(A|D)=\frac{1}{2}\times1+\frac{3}{8}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{25}{32}$.

14.【参考答案】$-\ln2$

【解题思路】因为$y'=e^{x+1}-2x$,所以 $e^{x_0+1}=2x_0$,$x_0>1$. 因为 $a_{n+1}=e^{a_n+1}$,$a_2+a_3=3x_0$,所以 $a_2+e^{a_2+1}=3x_0=x_0+2x_0=x_0+e^{x_0+1}$. 因为 $y=x+e^{x+1}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,所以 $a_2=x_0$,$a_3=2x_0$,$a_1=\ln a_2-1=\ln x_0-1$,所以 $a_1+a_2-a_3=\ln x_0-1-x_0$. 又因为 $e^{x_0+1}=2x_0$,所以 $x_0+1=\ln2x_0=\ln2+$

$\ln x_0$,所以 $a_1+a_2-a_3=\ln x_0-1-x_0=-\ln 2$.

15. 解:(1)列联表如下:

	感兴趣	不感兴趣	合计
男生	12	4	16
女生	9	5	14
合计	21	9	30

零假设为 H_0:学生对"数学建模"选修课的兴趣度与性别无关,

$K^2=\frac{30\times(12\times5-4\times9)^2}{16\times14\times21\times9}=\frac{20}{49}\approx0.4082<2.072$. …………………………………… 5 分

依据小概率值 $\alpha=0.15$ 的独立性检验,没有充分证据推断 H_0 不成立,因此可以认为 H_0 成立,即学生对"数学建模"选修课的兴趣度与性别无关. …………………………………… 6 分

(2)由题意可知,X 的取值可能为 0,1,2,3, …………………………………… 7 分

则 $P(X=0)=\frac{C_5^3}{C_9^3}=\frac{5}{42}$,$P(X=1)=\frac{C_4^1C_5^2}{C_9^3}=\frac{10}{21}$,$P(X=2)=\frac{C_4^2C_5^1}{C_9^3}=\frac{5}{14}$,$P(X=3)=\frac{C_4^3}{C_9^3}=\frac{1}{21}$, ……………………………………………… 11 分

故 X 的分布列如下:

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{21}$

$E(X)=0\times\frac{5}{42}+1\times\frac{10}{21}+2\times\frac{5}{14}+3\times\frac{1}{21}=\frac{4}{3}$. …………………………………… 13 分

16. (1)**证明:**因为 $AC=2$,$BC=1$,$AB=\sqrt{3}$,即 $BC^2+AB^2=AC^2$,

所以 $\angle ABC=90°$,即 $BC\perp AB$.

因为 AD//平面 PBC,$AD\subset$平面 $ABCD$,面 $ABCD\cap$面 $PBC=BC$,所以 $AD/\!/BC$, …………… 3 分

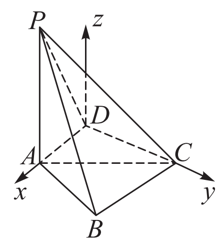
所以 $AD\perp AB$. 因为 $AD\perp PA$,$PA\cap AB=A$,

所以 $AD\perp$平面 PAB,所以 $PB\perp AD$. …………………………………… 6 分

(2)**解:**因为 $PA\perp$底面 $ABCD$,CD,$AD\subset$底面 $ABCD$,

所以 $PA\perp CD$,$PA\perp AD$.

又 $AD\perp CD$,



所以 $CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{2}$,以点 D 为原点,以 DA,DC 所在的直线为 x,y 轴,过点 D 作 PA 的平行线为 z 轴,建立空间直角坐标系如图所示. 令 $PA=t$,则

$A(\sqrt{2},0,0)$,$P(\sqrt{2},0,t)$,$D(0,0,0)$,$C(0,\sqrt{2},0)$,$\overrightarrow{AC}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$,$\overrightarrow{AP}=(0,0,t)$,$\overrightarrow{DC}=(0,\sqrt{2},0)$,$\overrightarrow{DP}=(\sqrt{2},0,t)$.

设平面 ACP 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$,

所以$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AP}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-\sqrt{2}x_1+\sqrt{2}y_1=0,\\ tz_1=0,\end{cases}$

令 $x_1=1$,则 $y_1=1,z_1=0$,所以 $\boldsymbol{n}_1=(1,1,0)$. ………………………………………… 9 分

设平面 CPD 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$,

所以$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DP}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DC}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}\sqrt{2}x_2+tz_2=0,\\ \sqrt{2}y_2=0,\end{cases}$

令 $z_2=\sqrt{2}$,则 $x_2=-t,y_2=0$,所以 $\boldsymbol{n}_2=(-t,0,\sqrt{2})$. …………………………… 11 分

因为二面角 $A-CP-D$ 的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,二面角为锐角,

所以$\dfrac{\sqrt{3}}{3}=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\left|\dfrac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}\right|=\dfrac{t}{\sqrt{2}\times\sqrt{2+t^2}}$,解得 $t=2$,所以 $PA=2$. ……………… 15 分

17. 解:(1)由正弦定理可知,$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$,

所以$\dfrac{\sin(B+C)}{\sin B+\sin C}=\dfrac{\sin(\pi-A)}{\sin B+\sin C}=\dfrac{\sin A}{\sin B+\sin C}=\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b-c}{a-c}$,

所以 $a^2-ac=b^2-c^2$,即 $a^2+c^2-b^2=ac$.

由余弦定理 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{ac}{2ac}=\dfrac{1}{2}$,所以$\angle B=\dfrac{\pi}{3}$. ……………………………………… 4 分

(2)因为$|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}|=3$,所以等号两边同时平方可得,$a^2+c^2+ac=9$.

又由(1)知 $a^2+c^2-ac=3$,所以 $a^2+c^2=6$,即 $ac=3$,所以 $a=c=\sqrt{3}$,

所以$\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=3\sqrt{3}$. ………………………………………………………… 7 分

(3)由正弦定理可得,$\dfrac{BC}{\sin\theta}=\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$,即 $BC=2\sin\theta$,

$\dfrac{CD}{\sin\theta}=\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}=\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$,即 $CD=2\sin\theta$.

因为四边形 $ABCD$ 的内角和为 2π,且$\angle ABC+\angle ADC=\pi$,所以 $\pi-2\theta=\angle BCD$,

所以 $S=\dfrac{1}{2}BC\cdot CD\sin\angle BCD=\dfrac{1}{2}\times2\sin\theta\times2\sin\theta\times\sin(\pi-2\theta)=2\sin^2\theta\times\sin2\theta$. …………… 11 分

(可以有多种表达形式,化简正确都得分)

$S=2\sin^2\theta\times\sin2\theta=(1-\cos2\theta)\sin2\theta=\sin2\theta-\sin2\theta\cos2\theta$,记 $x=2\theta$,

令 $f(x)=\sin x-\sin x\cos x$,

则 $f'(x)=\cos x-(\cos^2x-\sin^2x)=-2\cos^2x+\cos x+1=(2\cos x+1)(-\cos x+1)$.

因为在$\triangle ACD$ 中 $0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$,所以 $0<x<\dfrac{2\pi}{3}$,所以 $-\dfrac{1}{2}<\cos x<1$,

所以当 $-\dfrac{1}{2}<\cos x<1$ 时,$f'(x)>0$ 恒成立.

当 $\cos x=-\frac{1}{2}$,即 $x=\frac{2\pi}{3}$时,$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$;当 $\cos x=1$,即 $x=0$ 时,$f(0)=0$,

则 $0<f(x)<\frac{3\sqrt{3}}{4}$,所以 $0<S<\frac{3\sqrt{3}}{4}$. ……………………………………………………………… 15 分

18. 解:(1)由题意可知,直线 l 的斜率必存在. 当 AB 垂直于 y 轴时,点 $A\left(p,\frac{p}{2}\right)$,$B\left(-p,\frac{p}{2}\right)$,此时 $AB=2p=4$,即 $p=2$,所以抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$. ……………………………………………………… 5 分

(2)设直线 l 的方程为 $y=kx+1$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.

联立$\begin{cases}y=kx+1,\\x^2=4y,\end{cases}$ 得 $x^2-4kx-4=0$,所以 $x_1+x_2=4k$,$x_1x_2=-4$,则 $x_Q=2k$.

将 $x_Q=2k$ 代入直线 $y=kx+1$,得 $y_Q=2k^2+1$,则 AB 的中点 $Q(2k,2k^2+1)$.

因为 $x^2=4y$,所以 $y'=\frac{x}{2}$,则直线 PA 的方程为 $y-y_1=\frac{x_1}{2}(x-x_1)$,即 $y=\frac{1}{2}x_1x-\frac{1}{4}x_1^2$.

同理可得,直线 PB 的方程为 $y=\frac{1}{2}x_2x-\frac{1}{4}x_2^2$,所以 $x_P=\dfrac{\frac{1}{4}x_1^2-\frac{1}{4}x_2^2}{\frac{1}{2}(x_1-x_2)}=\frac{x_1+x_2}{2}=2k$,

$y_P=\frac{1}{2}x_1\cdot\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{1}{4}x_1^2=\frac{x_1x_2}{4}=-1$,所以 $P(2k,-1)$. 因为 $x_P=4$,则 $2k=4$,所以 $k=2$,此时 $Q(4,9)$,$P(4,-1)$,所以直线 PQ 的方程为 $x=4$,代入 $x^2=4y$,得 $y=4$,所以 $E(4,4)$,所以 $|QE|=9-4=5$. …………………………………………………………………………………………… 10 分

(3)由(2)知,$Q(2k,2k^2+1)$,$P(2k,-1)$,所以直线 PQ 的方程为 $x=2k$,代入 $x^2=4y$,得 $y=k^2$,所以 $E(2k,k^2)$,所以 E 为 PQ 的中点.

因为抛物线 C 在点 E 处的切线斜率 $y'=\frac{2k}{2}=k$,所以抛物线 C 在点 E 处的切线平行于 AB.

又因为 E 为 PQ 的中点,所以 $S_{四边形ABNM}=\frac{3}{4}S_{\triangle ABP}$.

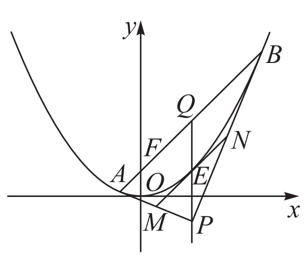
因为直线 AB 的方程为 $y=kx+1$,

所以 $|AB|=y_1+y_2+p=(kx_1+1)+(kx_2+1)+2=k(x_1+x_2)+4=4k^2+4$.

又 $P(2k,-1)$ 到直线 AB 的距离 $h=\frac{|2k^2+2|}{\sqrt{k^2+1}}=2\sqrt{k^2+1}$,所以 $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}|AB|\cdot h=\frac{1}{2}\cdot(4k^2+4)\cdot2\sqrt{k^2+1}=4(k^2+1)^{\frac{3}{2}}\geqslant4$,当且仅当 $k=0$ 时取"$=$",

所以 $S_{四边形ABNM}=\frac{3}{4}S_{\triangle ABP}\geqslant3$,

所以四边形 $ABNM$ 的面积的最小值为 3. …………………………………………………………… 17 分



19. (1)**解:**当 $x\geqslant 1$ 时,$\ln x+\frac{1}{2}x^2-ax+\frac{3}{2}\geqslant 0$ 恒成立,

即 $a\leqslant\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2x}$ 恒成立,只需 $a\leqslant\left(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2x}\right)_{\min}$ 即可.

令 $g(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2x}$,$x\geqslant 1$,则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}+\frac{1}{2}-\frac{3}{2x^2}=\frac{x^2-2\ln x-1}{2x^2}$.

令 $h(x)=x^2-2\ln x-1$,$x\geqslant 1$,则 $h'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2x^2-2}{x}$,

当 $x\geqslant 1$ 时,$h'(x)\geqslant 0$ 恒成立,即 $h(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增,所以 $h(x)\geqslant h(1)=0$,

所以 $g'(x)\geqslant 0$ 在$[1,+\infty)$上恒成立,即 $g(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增,

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=2$,

所以 $a\leqslant 2$,即实数 a 的最大值为 2. …………………………………………………………… 5 分

(2)**证明:**因为当 $a=2$ 时,$f(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2-2x$,$x>0$,

所以 $f'(x)=\frac{1}{x}+x-2=\frac{(x-1)^2}{x}\geqslant 0$,即 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

又 $f(1)=-\frac{3}{2}$,$f(x_1)+f(x_2)=-3$,且 $x_1\neq x_2$,所以不妨设 $0<x_1<1<x_2$.

要证 $x_1+x_2>2$,即证明 $x_2>2-x_1$.

因为 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,即证 $f(x_2)>f(2-x_1)$.

因为 $f(x_1)+f(x_2)=-3$,即证 $f(x_1)+f(2-x_1)<-3$.

设 $F(x)=f(x)+f(2-x)+3=\ln x+\frac{1}{2}x^2-2x+\ln(2-x)+\frac{1}{2}(2-x)^2-2(2-x)+3=$

$\ln[x(2-x)]+x^2-2x+1=\ln[x(2-x)]-x(2-x)+1$,$0<x<1$,

令 $t=x(2-x)$,$0<t<1$,则 $\varphi(t)=\ln t-t+1$,$\varphi'(t)=\frac{1}{t}-1=\frac{1-t}{t}$.

因为 $0<t<1$,所以 $\varphi'(t)>0$,即 $\varphi(t)$在$(0,1)$上单调递增,

所以 $\varphi(t)<\varphi(1)=0$,即 $F(x)=f(x)+f(2-x)+3<0$,

所以 $f(x_1)+f(2-x_1)<-3$ 成立,所以 $x_1+x_2>2$. …………………………………………………… 11 分

(3)**证明:**由(2)可知,当 $a=2$ 时,$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增,且 $f(x)>f(1)=-\frac{3}{2}$.

由 $\ln x+\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}>0$,得 $2\ln x+x^2-4x+3>0$,即 $2\ln x+(x-2)^2>1$.

令 $x=\frac{n+1}{n}$,则 $2\ln\frac{n+1}{n}+\left(\frac{n+1}{n}-2\right)^2>1$,即 $2\ln\frac{n+1}{n}+\left(\frac{1-n}{n}\right)^2>1$,

所以 $2\ln\frac{2}{1}+\left(\frac{1-1}{1}\right)^2>1$,$2\ln\frac{3}{2}+\left(\frac{1-2}{2}\right)^2>1$,$2\ln\frac{4}{3}+\left(\frac{1-3}{3}\right)^2>1$,…… ,$2\ln\frac{n+1}{n}+\left(\frac{1-n}{n}\right)^2>1$,

相加得 $2\ln(n+1)+\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{i-1}{i}\right)^2>n$. ……………………………………………………… 17 分