成都石室中学2024～2025学年度上期高2025届十一月月考

数学试卷

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的．

1. 已知集合 $A=\{x|\ y=\ln(x-1)\}$，集合 $B=\{y|\ y=e^{-x}\}$，则 $A\cap B=$（　）

A. $(0,1)$　　B. $(1,2)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(2,+\infty)$

2. 已知 $\triangle ABC$ 为单位圆 O 的内接正三角形，则 $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BC}=$（　）

A. $-\frac{3}{2}$　　B. $\frac{3}{2}$　　C. 1　　D. -1

3. 已知角 α 的终边上一点 $M(-1,2)$，则 $\dfrac{\sqrt{2-2\cos 2\alpha}}{\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}=$（　）

A. 2　　B. -2　　C. 4　　D. -4

4. 巴黎奥运会期间，旅客人数（万人）为随机变量 X，且 $X\sim N(30,2^2)$.记一天中旅客人数不少于26万人的概率为 p_0，则 p_0 的值约为（　）

（参考数据：若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，有 $P(\mu-\sigma<X\le\mu+\sigma)\approx 0.683$，$P(\mu-2\sigma<X\le\mu+2\sigma)\approx 0.954$，$P(\mu-3\sigma<X\le\mu+3\sigma)\approx 0.997$）

A. 0.977　　B. 0.9725　　C. 0.954　　D. 0.683

5．已知非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $(2\vec{a}+\vec{b})\perp(2\vec{a}-\vec{b})$，且向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影向量是 $\frac{1}{4}\vec{b}$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角是（　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{3}$　　C．$\frac{\pi}{2}$　　D．$\frac{2\pi}{3}$

6. 关于 x 的方程 $2\sin\frac{x}{2}=\sin 2x\cos\frac{x}{2}-\sqrt{3}\cos 2x\cos\frac{x}{2}$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上有（　）个实数根.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

7. 已知 $f(x)$，$g(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数，且 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，满足 $f(x)+g(x)=ax^2+x+2$，若对任意的 $1<x_1<x_2<2$，都有 $\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}>-3$ 成立，则实数 a 的取值

范围是（　）

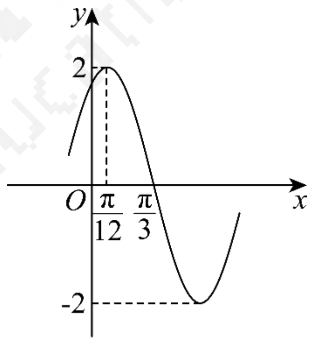
A. $\left[0,+\infty\right)$　　　　B. $\left[-\dfrac{3}{4},0\right]$　　　　C. $\left(-\dfrac{3}{4},+\infty\right)$　　　　D. $\left[-\dfrac{3}{4},+\infty\right)$

8. 已知 $a>0,b\in\mathbf{R}$，若关于 x 的不等式 $\left(ax-1\right)\left(x^2+bx-1\right)\geq 0$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上恒成立，则 $b+\dfrac{5}{a}$ 的最小值是（　）

A. 4　　　　B. $4\sqrt{2}$　　　　C. 8　　　　D. $8\sqrt{2}$

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 已知函数 $f\left(x\right)=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)\left(A>0,\omega>0,\left|\varphi\right|<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则下列说法正确的是（　）



A. $f\left(x\right)$ 的图象关于直线 $x=-\dfrac{5}{12}\pi$ 对称

B. $f\left(x\right)$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 上单调递增

C. $f\left(x-\dfrac{2\pi}{3}\right)$ 是奇函数

D. 将 $f\left(x\right)$ 图象上所有点的横坐标变为原来的 2 倍，得到函数 $y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 的图象

10. 已知 -1 为函数 $f(x)=x^3-3x+a$ 的一个零点，则（　）

A. $f(x)$ 的图象关于 $(0,-2)$ 对称　　　　B. $f(x)<0$ 的解集为 $(-\infty,2)$

C. $x\in(0,1)$ 时，$f\left(x^2\right)<f(x)$　　　　D. $x\in[m,n]$ 时，$f(x)\in[-4,0]$，则 $n-m$ 的最大值为 4

11. 已知函数 $f\left(x\right)$ 与 $g\left(x\right)$ 及其导函数 $f'(x)$ 与 $g'\left(x\right)$ 的定义域均为 R .若 $f\left(x\right)$ 为奇函数，$f\left(x\right)+g\left(2-x\right)=2$，$f'\left(x\right)+g'\left(x+1\right)=2$，则（　）

A. $g\left(-2\right)+g\left(6\right)=4$　　　　B. $f'\left(0\right)=0$

C. 曲线 $y=f'(x)$ 关于点 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 中心对称　　　　D. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2025}g'\left(\frac{k}{2}\right)=2025$

三、填空题：本大题共 3 小题，每小题 5 分，共计 15 分.

12. 若复数 z 满足 $z=\dfrac{3-3\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$，则 $|z+1|=$__________.

13. 已知某次数学期末试卷中有 8 道四选一的单选题，学生小万能完整做对其中 4 道题，在剩下的 4 道题中，有 3 道题有思路，还有 1 道完全没有思路，有思路的题做对的概率为 $\dfrac{2}{3}$，没有思路的题只能从 4 个选项中随机选一个答案．若小万从这 8 个题中任选 1 题，则他做对的概率为______.

14. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}=\mathrm{e}^{a_n+1}\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，$a_2+a_3=3x_0$，其中 x_0 为函数 $y=\mathrm{e}^{x+1}-x^2\left(x>1\right)$ 的极值点，则 $a_1+a_2-a_3=$______.

四、解答题：共 77 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15．（本小题 13 分）为提高学生的数学应用能力和创造力，石室中学打算开设“数学建模”选修课，为了解学生对“数学建模”的兴趣度是否与性别有关，学校随机抽取该校 30 名高中学生进行问卷调查，其中认为感兴趣的人数占 70%.

	感兴趣	不感兴趣	合计
男生	12		
女生		5	
合计			30

(1)根据所给数据，完成下面的 2×2 列联表，并根据列联表判断，依据小概率值α=0.15 的独立性检验，分析学生对“数学建模”选修课的兴趣度与性别是否有关?

(2)若感兴趣的女生中恰有 4 名是高三学生，现从感兴趣的女生中随机选出 3 名进行二次访谈，记选出高三女生的人数为 X，求 X 的分布列与数学期望

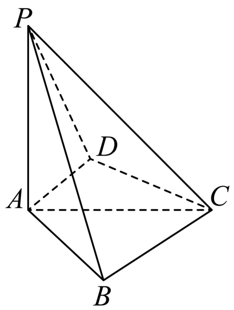
附：$K^2=\dfrac{n\left(ad-bc\right)^2}{\left(a+b\right)\left(c+d\right)\left(a+c\right)\left(b+d\right)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

α	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
x_α	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

16．（本小题15分）如图所示，在四棱锥$P-ABCD$中，$AC=2$，$BC=1$，$AB=\sqrt{3}$．

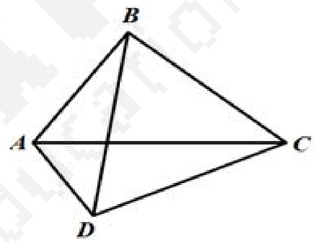
(1)若$AD//$平面PBC，$AD\perp PA$，证明：$PB\perp AD$

(2)若$PA\perp$底面$ABCD$，$AD\perp CD$，$AD=\sqrt{2}$，二面角$A-CP-D$的余弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，求PA的长．



17．（本小题15分）设$\triangle ABC$的内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，且

$(a-c)\cdot\sin(B+C)=(b-c)\cdot(\sin B+\sin C)$，$b=\sqrt{3}$．



(1)求B;

(2)若$\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right|=3$,求$\triangle ABC$的周长;

(3)如图，点D是$\triangle ABC$外一点，设$\angle BAC=\angle DAC=\theta$

且$\angle ADC=\dfrac{2}{3}\pi$，记$\triangle BCD$的面积$S$，求$S$关于$\theta$的关系式，并求$S$的取值范围.

18．已知抛物线$C:x^2=2py(p>0)$的焦点为F，直线l过点F交C于A,B两点，C在A,B两点的切线相交于点P,AB的中点为Q，且PQ交C于点E．当AB垂直于y轴时，AB长度为4;

(1)求C的方程;

(2)若点P的横坐标为4，求$|QE|$;

(3)设C在点E处的切线与PA,PB分别交于点M,N，求四边形$ABNM$面积的最小值.

19．（本小题17分）已知函数$f(x)=\ln x+\dfrac{1}{2}x^2-ax$，$(a>0)$.

(1)当$x\in[1,+\infty)$时，函数$f(x)\geq-\dfrac{3}{2}$恒成立，求实数a的最大值;

(2)当$a=2$时，若$f(x_1)+f(x_2)=-3$，且$x_1\neq x_2$，求证：$x_1+x_2>2$;

(3)求证：对任意$n\in\mathrm{N}^*$，都有$2\ln(n+1)+\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{i-1}{i}\right)^2>n$.