

泸州市高 2022 级第一次教学质量诊断性考试

数 学

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。第 I 卷 1 至 2 页，第 II 卷 3 至 4 页。共 150 分。考试时间 120 分钟。

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题的答案标号涂黑。
3. 填空题和解答题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内，作图题可先用铅笔绘出，确认后再用 0.5 毫米黑色签字笔描清楚，写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

第 I 卷（选择题 共 58 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的。请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上。

1. 已知集合 $A = \{x | \frac{x-3}{x+1} < 0\}$ ， $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ，则 $A \cap B =$
A. $\{1\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{0, 1\}$ D. $\{0, 1, 2\}$
2. 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $a_2 = 15$ ， $S_5 = 65$ ，则 $\{a_n\}$ 的公差为
A. -1 B. 1 C. -2 D. 2
3. 已知函数 $f(x) = e^x + x$ ，则满足 $f(x) > f(2x-1)$ 的 x 的取值范围是
A. $(-\infty, -1)$ B. $(-\infty, 1)$ C. $(-1, +\infty)$ D. $(1, +\infty)$
4. 已知函数 $f(x) = x(x-a)^2$ 在 $x=1$ 处取得极大值，则 a 的值是
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

5. 设 a, b 是实数, 则“ $a > |b|$ ”是“ $a^2 > b^2$ ”的
- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件
6. 若函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$ ($\omega > 0$) 在 $[0, \frac{\pi}{6}]$ 上单调递增, 则 ω 的取值范围是
- A. $(0, 2]$
B. $(0, 1]$
C. $(0, \frac{1}{2}]$
D. $[\frac{1}{2}, 1]$
7. 若 $\tan(\theta - \frac{\pi}{4}) = 3$, 则 $\sin 2\theta =$
- A. $-\frac{4}{5}$
B. $\frac{4}{5}$
C. $-\frac{3}{5}$
D. $\frac{3}{5}$
8. 已知平面向量 $|\overline{OA}| = 4$, $|\overline{OB}| = 3$, $|\overline{OC}| = 1$, $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0$, 则 $|\overline{CA} + \overline{CB}|$ 的最小值是
- A. 1
B. 2
C. $\frac{3}{2}$
D. 3

二、选择题: 本大题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多个选项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 若复数 z 满足 $z + 3\bar{z} = 4 + 2i$, 则
- A. $|z| = 2$
B. z 的虚部为 -1
C. $\frac{1+i}{z}$ 为纯虚数
D. $z^8 = 16$
10. 已知函数 $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$, 则
- A. -2π 是 $f(x)$ 的一个周期
B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称
C. $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}]$ 上单调递减
D. $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$
11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 若 $f(1+x) + f(3-x) = 2$, $f(x) - f(2-x) = 4 - 4x$, 则
- A. $f(0) = 4$
B. $f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 8$
C. $f(x) + f(x+2) = 8 - 4x$
D. $f(2024) = -4043$

第 II 卷 (非选择题 共 92 分)

注意事项:

(1)非选择题的答案必须用 0.5 毫米黑色签字笔直接答在答题卡上,作图题可先用铅笔绘出,确认后 再用 0.5 毫米黑色签字笔描清楚,答在试题卷和草稿纸上无效.

(2)本部分共 8 个小题,共 92 分.

三、填空题:本大题共 3 小题,每小题 5 分,共计 15 分.

12. 已知向量 $a = (1, 1)$, $b = (2, -5)$, 则 a 在 $a + b$ 上的投影向量的坐标为_____.

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} ax - 2, & x < 2, \\ \log_2 x, & x \geq 2 \end{cases}$, 对任意实数 k , 方程 $f(x) = k$ 有解, 则 a 的取值范围是_____.

14. 设函数 $f(x) = (ax^2 + bx + c)[2\cos(\pi x) + 1]$ ($abc \neq 0$), 当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x) \leq 0$, 则 $\frac{b+c}{a}$ 的值为_____.

四、解答题:本大题共 5 小题,共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 13 分)

已知函数 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3}) - \sqrt{3}$ ($x \in \mathbb{R}$).

(1) 求不等式 $f(x) > 0$ 的解集;

(2) 将 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标伸长为原来的两倍, 纵坐标不变, 得到 $g(x)$ 的图象, 求曲

线 $y = g(x)$ 在点 $(\frac{\pi}{3}, g(\frac{\pi}{3}))$ 处的切线与坐标轴围成的三角形面积.

16. (本小题满分 15 分)

设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $2S_n = 3a_n - 9$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 3$, $b_{n+1} = a_n b_n$, 求 $\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{\log_3 b_i}$ 的值.

17. (本小题满分 15 分)

设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\frac{\cos A}{a} = \frac{\cos B + \cos C}{b+c}$.

(1) 求 A ;

(2) 若 $2b^2 + c^2$ 的最大值为 $6 + 2\sqrt{3}$, 求 a 的值.

18. (本小题满分 17 分)

已知函数 $f(x) = ax + \frac{2}{e^{x+1} + 1} + a - 1 (x \in \mathbb{R})$.

(1) 证明: $y = f(x-1)$ 为奇函数;

(2) 求 $f(x)$ 的导函数的最小值;

(3) 若 $f(x)$ 恰有三个零点, 求 a 的取值范围.

19. (本小题满分 17 分)

对于 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 若数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_{n+1} - c_n > 1$, 则称这个数列为“优美数列”.

(1) 已知数列 $-1, \log_4 m, \log_2 m$ 是“优美数列”, 求实数 m 的取值范围;

(2) 若首项为 1 的等差数列 $\{a_n\}$ 为“优美数列”, 且其前 n 项和 S_n 满足 $S_n \leq n^2 + \frac{1}{2}n$ 恒成立,

求 $\{a_n\}$ 的公差的取值范围;

(3) 已知各项均为正整数的等比数列 $\{a_n\}$ 是“优美数列”, 数列 $\left\{\frac{1}{3}a_n\right\}$ 不是“优美数列”, 若

$b_n = \frac{a_{n+1}}{2^n + 1}$, 试判断数列 $\{b_n\}$ 是否为“优美数列”, 并说明理由.